Devoir maison 3

à rendre le vendredi 11 octobre
soit ex1+ex2, soit ex2+ex3

Exercice 1 : Réciproques des fonctions hyperboliques

On définit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Vérifier que th est définie sur $\mathbb{R}$ entier et donner la parité de ces trois fonctions.
2. Étude de la bijection réciproque de sh.
   (a) Montrer que sh est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On note l'application réciproque argsh.
   (b) Représenter dans un même repère le graphe de sh et celui de argsh.
   (c) Pour $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une expression explicite pour $\mathrm{argsh}(y)$. *Indication :* se ramener à une équation du second degré en $t = \mathrm{e}^x$.
   (d) Montrer grâce à cette expression que argsh est impaire. Comment justifier ce résultat autrement ?
3. Étude de la bijection réciproque de ch, restreinte à $\mathbb{R}_+$.
   (a) La fonction ch peut-elle être bijective sur $\mathbb{R}$?
   (b) Déterminer un intervalle J tel que $\mathrm{ch} : \mathbb{R}_+ \to J$ soit une bijection. On note argch sa bijection réciproque réciproque.
   (c) Représenter dans un même repère le graphe de ch (uniquement sur $\mathbb{R}_+$) et celui de argch.
   (d) À l'aide d'une relation entre ch et sh vue en cours, montrer que pour $y \in J$ et $x \in \mathbb{R}_+$,
   $$\mathrm{ch}(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}).$$
   (e) Déterminer tous les antécédents (dans $\mathbb{R}_+$ et dans $\mathbb{R}_-$) de 2 par ch, puis les antécédents de $\dfrac{1}{2}$.
4. Étude de la bijection réciproque de th.
   (a) Justifier que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et simplifier sa dérivée. En déduire la monotonie de th.
   (b) Déterminer les limites de th en $\pm\infty$. La fonction th est-elle surjective ?
   (c) Déterminer un intervalle J tel que $\mathrm{th} : \mathbb{R} \to J$ soit une bijection. On note argth sa bijection réciproque.
   (d) Comme précédemment, déterminer une expression explicite de argth.

Exercice 2 : Escargot complexe

Déterminer le terme général des deux suites suivantes, définies par une récurrence double :

$$\begin{cases} u_0 &= \dfrac{3}{2} + i, \\ u_1 &= \dfrac{3}{2} i, \\ u_{n+2} &= \dfrac{(1+i)}{2} u_{n+1} + \dfrac{(1-i)}{2} u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = 1, \\ v_1 = 0, \\ v_{n+2} = 3\sqrt{3} v_{n+1} - 9 v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Placer sur le plan complexe les points d'affixe u_k pour k allant de 0 à 8.
Indice : pour s'en sortir avec très peu de calculs, mettre sous forme exponentielle la racine non réelle de l'équation caractéristique,

Exercice 3 : une équation dans $\mathbb{C}$

Pour $n \geqslant 2$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, que l'on note (E_n) : $z^n + z + 1 = 0$.

Le but de l'exercice est de démontrer que ses solutions sont toutes de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

1. Cas $n = 2$.

   (a) Résoudre l'équation (E_2).

   (b) Conclure que les solutions de (E_2) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

2. Cas $n = 3$.

   (a) En étudiant la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, montrer que (E_3) admet une unique solution réelle que l'on notera a.

   (b) Justifier que $-1 < a < -\dfrac{1}{2}$.

   (c) On suppose que $b \in \mathbb{C}$ est solution de (E_3). Montrer que $\overline{b}$ est aussi solution de (E_3).

   On admet que l'on a la factorisation suivante : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + z + 1 = (z-a)(z-b)(z-\overline{b})$ où b et $\overline{b}$ sont les deux autres solutions, complexes conjuguées l'une de l'autre, de (E_3).

   (d) En déduire que $-ab\overline{b} = 1$.

   (e) Conclure que les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

3. Cas $n \geqslant 4$.

   (a) Montrer que si z est solution de (E_n), alors $|z|^n \leqslant |z| + 1$.

   (b) Donner le tableau de variation de $g_n : x \mapsto x^n - x - 1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   (c) En déduire que le signe de g_n sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

   (d) Conclure que les solutions de (E_n) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.