Devoir maison 3 - corrigé

Exercice 1.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$ (en tant que somme d'exponentielles), donc le dénominateur ne s'annule jamais et th est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2} = f(x)$ donc $\boxed{\mathrm{ch} \text{ est une fonction paire.}}$

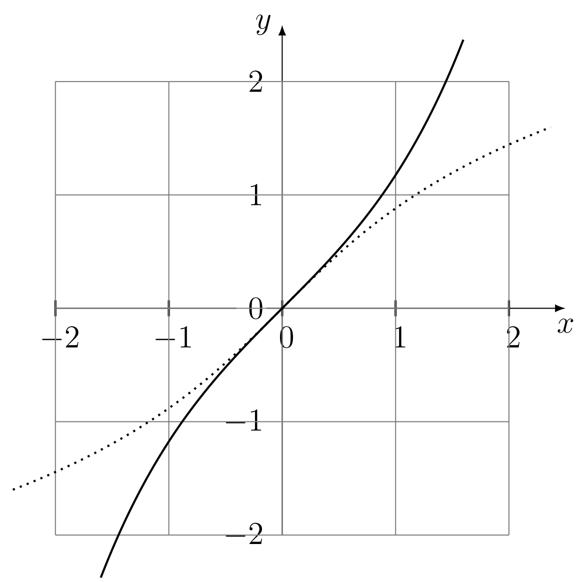
   Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2} = -\mathrm{sh}(x)$, donc $\boxed{\mathrm{sh} \text{ est une fonction impaire.}}$

   Par quotient, th est une fonction impaire.

2. (a) La fonction <u>sh est continue</u> sur $\mathbb{R}$ et on a vu en cours que $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ et ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$ (comme somme d'exponentielles), donc <u>sh est strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}$ qui est un <u>intervalle</u>.

   Ainsi sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]\lim\limits_{-\infty}\mathrm{sh}, \lim\limits_{+\infty}\mathrm{sh}[= \mathbb{R}$ (calcul de limites sans forme indéterminée).

   (b) Graphe de la fonction sh et de sa bijection réciproque (en pointillé).



   (c) Pour $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{sh}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad (\mathrm{e}^{x})^2 - 2y\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{x} = y + \sqrt{y^2+1}$$

   car le polynôme du second degré $X^2 - 2yX - 1$ a pour racines $y + \sqrt{y^2+1}$ et $y - \sqrt{y^2+1}$ et seule la première est strictement positive (et $\mathrm{e}^{x} > 0$). Ainsi,

$$\mathrm{sh}(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

   Autrement dit, l'unique antécédent de y par sh est $\ln(y + \sqrt{1+y^2})$, ou encore

$$\boxed{\mathrm{argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).}$$

(d) Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}\operatorname{argsh}(-y) + \operatorname{argsh}(y) &= \ln\left(-y + \sqrt{1+y^2}\right) + \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) \\ &= \ln\left((-y + \sqrt{1+y^2})(y + \sqrt{1+y^2})\right) = \ln\left((1+y^2) - y^2\right) = 0\end{aligned}$$

donc $\boxed{\operatorname{argsh} \text{ est impaire sur } \mathbb{R}}$.

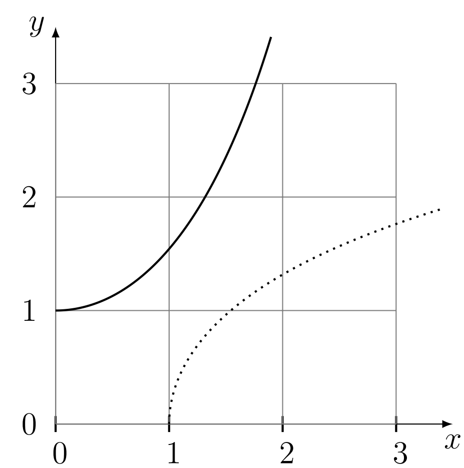
Autre justification (sans calcul) : la bijection réciproque d'une fonction impaire est toujours impaire. Preuve : si $y \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(-y)$ est par définition l'antécédent de $-y$ par sh. Or comme sh est impaire, on a $\operatorname{sh}\big(-\operatorname{argsh}(y)\big) = -\operatorname{sh}\big(\operatorname{argsh}(y)\big) = -y$. Donc $-\operatorname{argsh}(y)$ est un antécédent de $-y$ par sh et par unicité de l'antécédent on a $\operatorname{argsh}(-y) = -\operatorname{argsh}(y)$. Ainsi, argsh est impaire.

3. (a) La fonction ch étant paire, on a $\operatorname{ch}(-1) = \operatorname{ch}(1)$, avec $-1 \neq 1$, donc $\operatorname{ch}(1)$ a plusieurs antécédents et $\boxed{\operatorname{ch} \text{ n'est pas bijective sur } \mathbb{R}.}$

(b) Pour $x \in [0, +\infty[$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \geqslant 0$ car $e^x \geqslant e^{-x}$. De plus, sh ne s'annule qu'en 0.

Ainsi, la fonction ch est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, et elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ vers l'intervalle $[\operatorname{ch}(0), \lim\limits_{+\infty} \operatorname{ch}[= \boxed{[1, +\infty[\,.}$

(c) Graphe de la fonction ch et de sa bijection réciproque (en pointillé).



(d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$.

De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\operatorname{sh}(x) = \sqrt{\operatorname{ch}(x)^2 - 1}$ puisque $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ et $\operatorname{sh}(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour $y \in [1, +\infty[$,

$$\operatorname{ch}(x) = y \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right).$$

L'implication réciproque est aussi vraie car on sait que y admet au moins un antécédent.

(e) D'après la question précédente, $\ln(2+\sqrt{3})$ est un antécédent de 2 par ch (l'unique antécédent positif) et par parité de ch, $-\ln(2+\sqrt{3})$ est l'unique antécédent négatif.

$\frac{1}{2}$ n'admet pas d'antécédent par f car il n'est pas dans l'intervalle image.

4. (a) La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$, puisque c'est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ avec le dénominateur qui ne s'annule pas. Si $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.}$$

Cette dérivée étant strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$, th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour $x \to +\infty$, on écrit :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}.$$

Quand $x \to +\infty$, les deux exponentielles dans le dernier quotient tendent vers 0, et on obtient donc $\boxed{\mathrm{th}(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1.}$

Pour $x \to -\infty$, on écrit :

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$

Quand $x \to -\infty$, les deux exponentielles dans le dernier quotient tendent vers 0, et on obtient donc $\boxed{\mathrm{th}(x) \underset{x\to-\infty}{\to} -1.}$

Comme th est strictement croissante, elle n'atteint par exemple pas la valeur 2 (sinon sa limite en $+\infty$ serait strictement supérieure à 2), donc th n'est $\underline{\text{pas surjective}}$.

(c) La fonction th est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la limite monotone, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\underline{J =]-1, 1[}$ au vu des limites déterminées dans la question précédente.

(d) Pour $y \in]-1, 1[$,

$$\mathrm{th}(x) = y \iff \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} = y \underset{(\text{car } y \neq 1)}{\iff} \mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \underset{\left(\text{car } \frac{1+y}{1-y} > 0\right)}{\iff} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

On a une expression explicite de la fonction réciproque : si $y \in]-1, 1[$, $\boxed{\mathrm{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).}$

À titre de vérification, on observe que cette dernière expression est bien définie exactement sur le domaine voulu, et que les limites en ± 1 sont égales à $\pm\infty$, en cohérence avec les limites de th en $\pm$.

Exercice 2. • L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - \frac{(1+i)}{2}r - \frac{(1-i)}{2} = 0$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

$$\Delta = \left(\frac{(1+i)}{2}\right)^2 + 4\frac{(1-i)}{2} = \frac{2i}{4} + 4\frac{(1-i)}{2} = \frac{4-3i}{2}.$$

Déterminons les racines carrés de Δ sous forme algébrique : si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$(x+iy)^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \dfrac{\sqrt{4^2+3^2}}{2} = \dfrac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 2 \\ 2xy = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Comme Δ est un complexe non nul, il admet exactement deux racines carrées complexes, opposées l'une de l'autre. Si $x+iy$ est une telle racine, en sommant les deux premières lignes, on obtient $2x^2 = \frac{9}{2}$, c'est-à-dire $x^2 = \frac{9}{4}$, et la deuxième ligne nous donne $y^2 = x^2 - 2 = \frac{1}{4}$. La troisième ligne indique que x et y sont nécessairement de signes opposés. Les deux racines carrées de Δ sont donc $\pm\frac{3-i}{2}$. Par conséquence, les racines de l'équation caractéristiques sont

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2} + \frac{3-i}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1+i}{2} - \frac{3-i}{2}\right) = \frac{-1+i}{2}.$$

Il existe alors deux constantes complexes A et B telles que le terme général de la suite s'écrit à l'aide de ces racines :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Déterminons ces constantes à l'aide des données initiales : si

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + i = u_0 = A + B \\ \frac{3}{2}i = u_1 = Ar_1 + Br_2, \end{cases}$$

alors en ôtant la deuxième ligne à la première, comme $r_1 = 1$, on obtient

$$\frac{3}{2} + i - \frac{3}{2}i = B(1 - r_2) = B\left(1 - \frac{-1+i}{2}\right) = B\left(\frac{3}{2} - \frac{i}{2}\right)$$

donc en divisant à gauche et à droite par $\frac{3}{2} - \frac{i}{2}$ qui est un complexe non nul, il vient $B = 1$. Ensuite la première ligne donne $A = \frac{3}{2} + i - B = \frac{1}{2} + i$. Ainsi si A et B sont les constantes associées à (u_n), on a nécessairement $(A, B) = (\frac{1}{2} + i, 1)$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = Ar_1^n + Br_2^n = \frac{1}{2} + i + \left(\frac{-1+i}{2}\right)^n.}$$

On met comme conseillé $\frac{i-1}{2}$ sous forme exponentielle : $\frac{i-1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(3i\pi/4)$. On a alors que les points d'affixes $u_n = \left(\frac{1}{2} + i\right) + \frac{1}{\sqrt{2}^n}\exp(i3n\pi/4)$ forment une spirale s'enroulant asymptotiquement sur le point limite L d'affixe $\frac{1}{2} + i$, voir Figure 1.

- L'équation caractéristique associée à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $r^2 - 3\sqrt{3}r + 9 = 0$. Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est

  $$\Delta = (3\sqrt{3})^2 - 4 \times 9 = -9.$$

  Le discriminant est réel et strictement négatif, ses racines carrées sont donc $\pm 3i$ et les racines de l'équation caractéristiques sont complexes conjuguées :

  $$r = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2} \text{et} \bar{r} = \frac{3\sqrt{3} - 3i}{2}$$

  On met r sous forme exponentielle par identification d'une $\mathrm{e}^{i\theta}$ bien connue :

  $$r = \frac{3\sqrt{3} + 3i}{2} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 3\,\mathrm{e}^{i\pi/6}$$

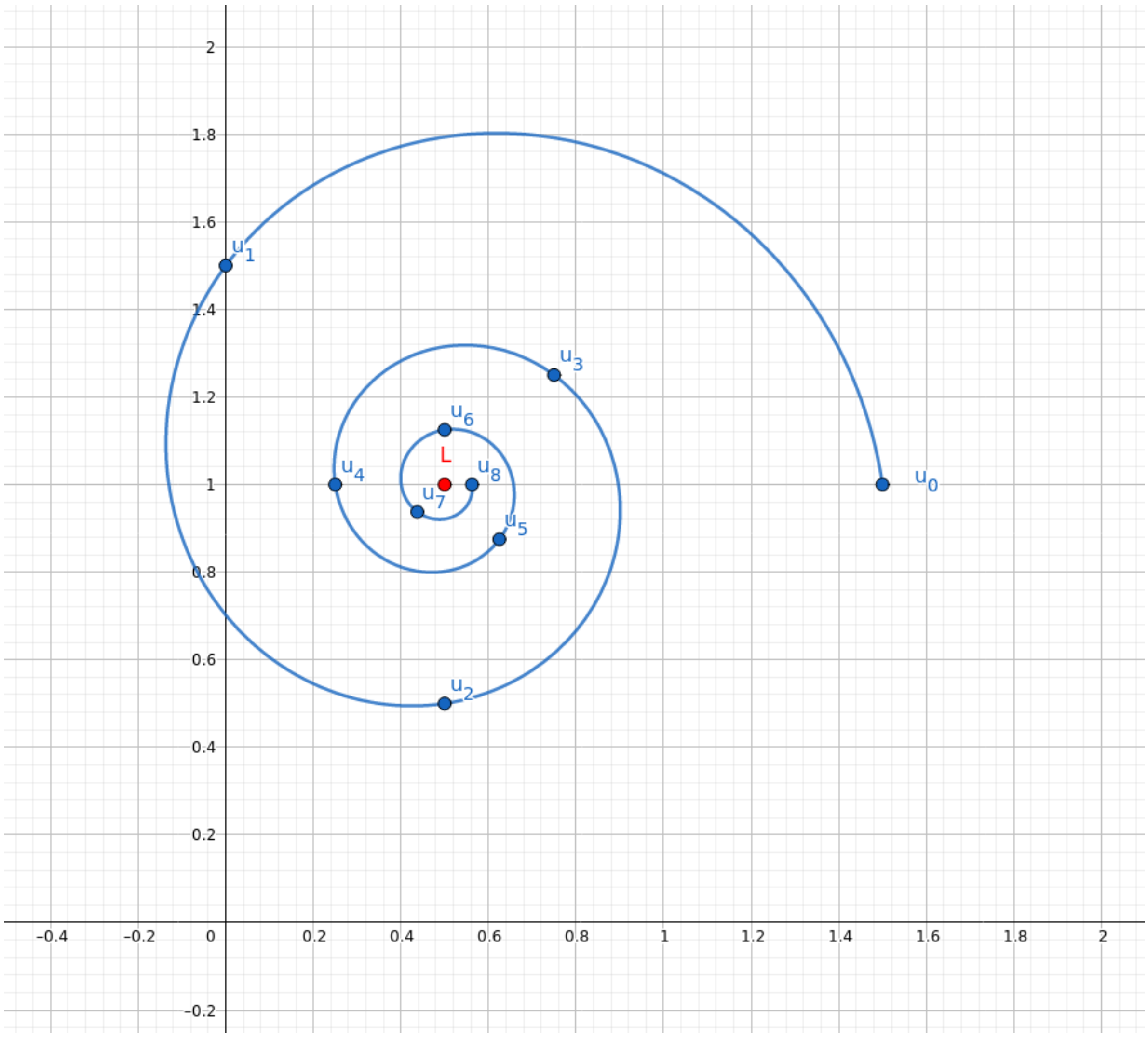


Figure 1: Les 8 premiers termes de la suite u_n, dessinés avec GeoGebra

Il existe alors des constantes réelles A et B telles que le terme général de la suite s'écrit :
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = A3^n \cos(n\pi/6) + B3^n \sin(n\pi/6).$$
Déterminons ces constantes à l'aide des données initiales :
$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = v_0 = A \\ 0 = v_1 = 3A\cos(\pi/6) + 3B\sin(\pi/6) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ 0 = 3A\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 3B\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} A = 1 \\ 0 = \sqrt{3} + B \end{array} \right.$$
Ainsi si A et B sont les constantes associées à (v_n), on a nécessairement $(A, B) = (1, -\sqrt{3})$. On peut donc conclure :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = 3^n \cos(n\pi/6) - \sqrt{3} \times 3^n \sin(n\pi/6).}$$

Exercice 3.

1. (a) $(E_2) : z^2 + z + 1 = 0$ est une équation polynomiale de degré 2, dont le discriminant est $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$. Ainsi, ses solutions sont
$$\boxed{j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overline{j} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$
Ce sont aussi les deux racines 3-ièmes de l'unité différentes de 1.

   (b) Comme j et $\overline{j}$ sont racines de l'unité, en particulier $|j| = |\overline{j}| = 1 < \sqrt{2}$, donc les solutions de (E_2) sont toutes de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

2. (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$).
On en déduit que 0 admet un unique antécédent par f que l'on note a. Cela signifie que pour $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = 0 \iff x^3 + x + 1 = 0 \iff x = a$$
ou autrement dit, $\boxed{a \text{ est l'unique solution réelle de } (E_3).}$

   (b) On a $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$ et $f(-1) = -1 < 0$, donc $f(-1) < f(a) < f(-\frac{1}{2})$, et par croissance de f, on en déduit que $\boxed{-1 < a < -\frac{1}{2}.}$

   (c) Supposons que $b \in \mathbb{C}$ est solution de (E_3), c'est à dire $b^3 + b + 1 = 0$.
On a alors, d'après les règles de calcul du conjugué, $0 = \overline{0} = \overline{b^3 + b + 1} = \overline{b}^3 + \overline{b} + 1$, ce qui montre que $\underline{\overline{b} \text{ est solution de } (E_3)}$.

   (d) D'après la factorisation admise, et en évaluant pour $z = 0$, on obtient $1 = (-a)(-b)(-\overline{b}) = -ab\overline{b}$.

   (e) D'après la question précédente, $|b|^2 = b\overline{b} = \frac{1}{-a}$, et d'après (b), $1 < \frac{1}{-a} < 2$ car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^\star$ où vivent -1, a et $-\frac{1}{2}$.
Ainsi, $|b| = |\overline{b}| < \sqrt{2}$, et comme $|a| < 1 < \sqrt{2}$, on a bien vérifié que toutes les solutions de (E_3) sont de module strictement inférieur à $\sqrt{2}$.

3. (a) Supposons que $z \in \mathbb{C}$ est une solution de (E_n). On a donc $z^n = -z-1$ et donc

$$|z|^n = |z^n| = |-z-1| = |z+1| \leqslant |z|+1 \text{ d'après l'inégalité triangulaire.}$$

(b) La fonction g_n est dérivable (car polynomiale) et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g_n'(x) = nx^{n-1} - 1$. Ainsi

$$g_n'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad nx^{n-1} \geqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \geqslant \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

On note $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ et le tableau de variation de g_n sur $\mathbb{R}_+$ est:

x	0		a_n		$+\infty$
$g_n'(x)$		$-$	0	$+$	
g_n	-1	$\searrow$	$g_n(a_n)$	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On rappel que $n \geqslant 4$, donc $\sqrt{2}^n \geqslant \sqrt{2}^4 = 2^2 = 4$ et ainsi $g_n(\sqrt{2}) \geqslant 4 - \sqrt{2} - 1 > 0$ car $3 > \sqrt{2}$. D'après le tableau de variation de la question précédente, g_n est négative sur $[0, a_n]$ et comme $g_n(\sqrt{2}) > 0$, on a nécessairement $\sqrt{2} > a_n$. Ainsi, g_n est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$ (car $\subset [a_n, +\infty[$) et donc strictement positive sur cet intervalle (toujours car $g_n(\sqrt{2}) > 0$).

(d) Si $|z| \geqslant 2$, on a d'après la question précédente $g_n(|z|) > 0$, c'est à dire $|z|^n - |z| - 1 > 0$. La contraposée du résultat obtenu en 3.(a) permet alors de déduire que $|z|$ n'est pas solution de (E_n).

Autrement dit, on a montré que

$$|z| \geqslant \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad z \text{ n'est pas solution de } (E_n)\ ,$$

ce qui est bien équivalent (par contraposée) à

$$z \text{ est solution de } (E_n) \quad \Longrightarrow \quad |z| < \sqrt{2}\ .$$