

Devoir maison 4

à rendre le mardi 5 novembre

Exercice 1 : Transformation de Joukovsky

On définit une fonction $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ par :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

- (a) Déterminer, sous forme algébrique, les racines carrées de $-8 - 6i$.
(b) En déduire les solutions de l'équation :

$$f(z) = \frac{3 - i}{2}.$$

- Quels sont les complexes $a \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'équation :

$$f(z) = a$$

a des solutions ? Combien y en a-t-il alors ?

- On rappelle la notation : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. Montrer :

$$\{f(z), z \in \mathbb{U}\} = [-2, 2].$$

Exercice 2 : Unités des entiers d'Eisenstein

On rappelle que $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Soit

$$A = \left\{ a + bj \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Déterminer l'ensemble des $x \in A$ tels que $\exists y \in A : xy = 1$.

Indication : esquisser A dans le plan complexe, et montrer que tout élément de A a pour norme un entier.

Exercice 3 : Une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

On considère une solution au problème, notée f .

1. Calculer $f(0)$.
2. Justifier que f est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x) + Ce^x,$$

où C est une constante qu'on explicitera.

3. Déterminer les solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) + Ce^x & \forall x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4. Qu'a-t-on montré ? Conclure.

Exercice 4 : Un peu de calcul intégral

Dans la feuille d'exercices n°5 (calculs d'intégrales) :

- ▶ déterminer une primitive au choix (parmi celles non déjà corrigées) de l'exo 1,
 - ▶ calculer une intégrale au choix de l'exo 5 par intégration par parties,
 - ▶ calculer une intégrale au choix de l'exo 7 par changement de variables,
- en veillant à adapter ce choix à votre aisance calculatoire.