Devoir maison n+1

CALCUL MATRICIEL

Traiter **au choix** l'un des deux exercices suivants.

Exercice 1. Une suite récurrente linéaire d'ordre 3.

On considère les matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calcul des puissances de J.
   (a) Déterminer une matrice diagonale D telle que $J = D + N$.

   (b) Calculer N^2, DN et ND.

   (c) À l'aide du binôme de Newton, en déduire une expression simple de J^n pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la matrice colonne $V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = AV_n$.

   (b) Montrer par récurrence que $V_n = A^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. On définit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

   (b) Vérifier que $A = PJP^{-1}$.

   (c) En déduire une expression de A^n en fonction de P, de P^{-1} et des puissances de J.

4. Exprimer explicitement le terme général de (v_n) en fonction de n, et en donner un équivalent simple.

Exercice 2. Matrices nilpotentes.

On dit qu'une matrice carrée $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier naturel p tel que $N^p = \mathcal{O}_n$.

1. On considère les matrices

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lesquelles sont nilpotentes ? Justifier.

2. Montrer que la somme de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore nilpotente. Est-ce encore vrai sans l'hypothèse de commutativité ?

3. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer le produit
   $$(I_n - B)(I_n + B + \cdots + B^p).$$
   (b) En déduire que si B est nilpotente, alors $I_n - B$ est inversible, et donner son inverse en fonction de B.

4. On considère deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on suppose que A est inversible.
   (a) Montrer que A et B commutent si, et seulement si, A^{-1} et B commutent.
   (b) En déduire que si B est nilpotente et commute avec A, alors $A^{-1}B$ est nilpotente.

5. On fixe maintenant A et N deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, et on suppose que N est nilpotente. Démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible} \iff A + N \text{ est inversible.}$$

Indication : considérer $I_n + A^{-1}N$ et utiliser ce qui précède.

6. Pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la *matrice exponentielle* de N, par la formule

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!}.$$

   (a) Montrer que cette somme est en fait une somme finie.
   (b) En utilisant ce qui précède, montrer que si N est une matrice nilpotente, $\exp(N)$ est inversible.
   (c) Existe-t-il une matrice nilpotente dont la matrice exponentielle est I_n ?
   (d) Déterminer $\exp(N_1)$ et $\exp(N_2)$, pour les matrices N_1 et N_2 définies en début d'exercice.
   (e) Soient $N, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Montrer que
   $$\exp(N + M) = \exp(N)\exp(M).$$
   (f) En déduire la forme de l'inverse de $\exp(N)$.