Devoir maison n+10

Exercice 1 (Isomorphisme de Riesz et produit vectoriel)**.**
Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien.

1. Montrer que $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) \\ a & \longmapsto & \langle a, \cdot\rangle \end{array} \right.$ définit un isomorphisme.

Cet isomorphisme s'appelle *isomorphisme de Riesz.*

On suppose à présent que E est de dimension 3, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E.

2. Soit $(u, v) \in E^2$.
   (a) Justifier que $w \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ définit une forme linéaire sur E.
   (b) En déduire qu'il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $w \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle a, w\rangle$.

   On appelle *produit vectoriel de u et de v* ce vecteur, et on note $a = u \wedge v$.

3. Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $v \wedge u = -u \wedge v$.

4. Montrer que pour $(u, v) \in E^2$, (u, v) est lié si et seulement si $u \wedge v = 0_E$.

5. Montrer que pour tout $u \in E$, $v \mapsto u \wedge v$ est un endomorphisme de E.
   Cet endomorphisme peut-il être injectif ?

6. Montrer que $e_3 = e_1 \wedge e_2$, $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1$.

7. Montrer que $u \wedge v \in (\mathrm{Vect}(u, v))^\perp$.
   En déduire que $(\mathrm{Vect}(u, v))^\perp = \mathrm{Vect}(u \wedge v)$ si (u, v) est libre.

8. On suppose que $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique et du produit scalaire canonique.
   Retrouver l'expression connue du produit vectoriel de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées.
   Indication : on pourra développer $\det_{\mathcal{B}_{can}}(u, v, w)$ par rapport à la dernière colonne pour faire apparaître les coordonnées de $u \wedge v$.

Exercice 2 (Déterminants circulants)**.**

1. *Un cas particulier.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.
   (a) Déterminer le noyau de J, un vecteur colonne $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $JV = nV$, et montrer que J est semblable à $nE_{1,1}$.
   (b) En déduire la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.
   (c) Pour quelles valeurs de a et b ce déterminant est-il nul ? Commenter.

2. *Généralisation.* Dans toute la suite, on fixe $n \geq 2$ et $\zeta = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.
   (a) On note $C = E_{1,n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} \in M_n(\mathbb{C})$.
   Calculer les puissances successives de C. Que vaut C^n ?
   Indication : raisonner sur les endomorphismes canoniquement associés.
   (b) Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, l'espace vectoriel $\left\{X \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; CX = \omega X\right\}$ est une droite. Montrer que ces droites sont en somme directe deux à deux.
   (c) En déduire que C est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1})$. Que dire des puissances de C ?
   (d) En déduire que, pour tous $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on a
   $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \zeta^j a_1 + \cdots + \zeta^{j(n-1)} a_{n-1}\right).$$
   Indication : écrire la matrice de gauche comme combinaison linéaire des puissances de C.