Devoir maison n+10 - Correction

**Exercice 1** (Isomorphisme de Riesz et produit vectoriel)**.**
Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. L'application $\phi$ est bien définie : comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire, quel que soit $a \in E$, $\langle a, \cdot \rangle$ est linéaire.
   Montrons que $\phi$ est linéaire : si $(a, \tilde{a}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle a + \lambda \tilde{a}, \cdot \rangle = \langle a, \cdot \rangle + \lambda \langle \tilde{a}, \cdot \rangle$ par bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, donc $\phi$ est bien linéaire.
   Montrons que $\phi$ est injective : si $a \in E$ est tel que $\langle a, \cdot \rangle = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors pour tout $w \in E$, $\langle a, w \rangle = 0$, autrement dit $a$ est orthogonal à tout vecteur de $E$, autrement dit $a \in E^{\perp} = \{0_E\}$, donc $a = 0_E$.
   *Alternative :* comme pour tout $w \in E$, $\langle a, w \rangle = 0$, en particulier $\langle a, a \rangle = 0$ donc $a$ est nul puisque $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.
   Comme $E$ est un espace euclidien, $E$ est de dimension finie et donc $\dim E = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ; comme $\phi$ injective, c'est donc un isomorphisme par égalité des dimensions.

2. Soit $(u, v) \in E^2$.

   (a) L'application $w \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$ est linéaire puisque le déterminant est linéaire par rapport à chaque colonne, et à valeurs réelles. C'est donc une forme linéaire sur $E$, qu'on note $\ell$.

   (b) Pour exploiter l'isomorphisme de Riesz, on remarque que "pour tout $w \in E$, $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle a, w \rangle$" est équivalent à $\phi(a) = \ell$. Comme $\phi$ est un isomorphisme et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ d'après la question précédente, il existe un unique vecteur $a \in E$ qui vérifie ces assertions.

   On note donc $u \wedge v$ le seul vecteur de $E$ qui vérifie $\boxed{\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle}$ pour tout $w \in E$.

3. Soit $(u, v) \in E^2$.
   Pour tout $w \in E$, $\langle v \wedge u, w \rangle = \det_{\mathcal{B}}(v, u, w) = -\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = -\langle u \wedge v, w \rangle$ par antisymétrie de $\det_{\mathcal{B}}$.
   Donc pour tout $w \in E$, $\langle v \wedge u + u \wedge v, w \rangle = 0$, autrement dit $v \wedge u + u \wedge v \in E^{\perp} = \{0_E\}$, ce qui prouve le résultat.
   *Alternative :* Donc $\phi(v \wedge u) = -\phi(u \wedge v)$, et on conclut par linéarité et injectivité de $\phi$.

4. Soit $(u, v) \in E^2$.
   Si $(u, v)$ est liée, alors $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = 0 = \langle 0, w \rangle$ pour tout $w \in E$, donc par unicité $u \wedge v = 0_E$.
   Si $(u, v)$ est libre, on peut compléter la famille $(u, v)$ en une base $(u, v, w)$ de $E$, dont le déterminant ne s'annule pas. Par conséquent, $u \wedge v$ ne peut pas être nul puisque $\det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle \neq 0$.

5. Montrons que pour tout $u \in E$, $v \mapsto u \wedge v$ est linéaire : si $(u, \tilde{u}) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, <u>pour tout $w \in E$</u>,

$$\begin{aligned}
\langle (u + \lambda \tilde{u}) \wedge v, w \rangle &= \det_{\mathcal{B}}(u + \lambda \tilde{u}, v, w) && \text{par définition de } \wedge \\
&= \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) + \lambda \det_{\mathcal{B}}(\tilde{u}, v, w) && \text{par linéarité par rapport à } u \text{ de } \det_{\mathcal{B}} \\
&= \langle u \wedge v, w \rangle + \lambda \langle \tilde{u} \wedge v, w \rangle && \text{par définition de } \wedge \\
&= \langle u \wedge v + \lambda \tilde{u} \wedge v, w \rangle && \text{par linéarité à gauche de } \langle \cdot, \cdot \rangle
\end{aligned}$$

   Ceci prouve que $\phi(u + \lambda \tilde{u}) = \phi(u \wedge v + \lambda \tilde{u} \wedge v)$, donc par injectivité de l'isomorphisme de Riesz, on a $(u + \lambda \tilde{u}) \wedge v = u \wedge v + \lambda \tilde{u} \wedge v$.
   On a montré la linéarité de l'application considérée, qui va bien de $E$ dans $E$ : c'est un endomorphisme.
   Si $u = 0$, c'est l'endomorphisme nul d'après la question précédente.
   Sinon, $u$ est dans le noyau de cet endomorphisme, qui n'est donc pas injectif.

6. Soit $w \in E$. On décompose $w$ dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ : $w = w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3$.
Alors par linéarité pr rapport à la troisième variable,
$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, w) = w_1 \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_1)}_{=0} + w_2 \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_2)}_{=0} + w_3 \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3)}_{=1} = w_3 = \langle e_3, w \rangle$$
puisque $(e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée.
Comme cela est vérifié pour tout $w$, on a donc démontré que $e_3 = e_1 \wedge e_2$.
On procède de même pour vérifier que $e_1 = e_2 \wedge e_3$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1$, en utilisant que $\det_{\mathcal{B}}(e_2, e_3, e_1) = \det_{\mathcal{B}}(e_3, e_1, e_2) = \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$ (on échange à chaque étape 2 fois 2 colonnes).

7. Soit $w \in \mathrm{Vect}(u, v))$. Alors $(u, v, w)$ est une famille liée donc $\langle u \wedge v, w \rangle = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w) = 0$.
On en conclut que $u \wedge v \in (\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$.
Si $(u, v)$ est libre, $\mathrm{Vect}(u, v)$ est de dimension 2 donc $(\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$ est de dimension 1 puisque l'espace ambiant $E$ est de dimension 3. Comme $(\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$ est stable par combinaison linéaire, et $u \wedge v \in (\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$, on a l'inclusion $\mathrm{Vect}(u \wedge v) \subset (\mathrm{Vect}(u, v))^{\perp}$. Comme $(u, v)$ est libre, d'après la question 4, $u \wedge v$ est non nul donc ces deux sev ont même dimension : ils sont alors nécessairement égaux.

8. On suppose que $E = \mathbb{R}^3$ est muni de la base canonique et du produit scalaire canonique. Pour $(u, v, w) \in E$ et on note $u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$.
Alors
$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} = w_x \begin{vmatrix} u_y & v_y \\ u_z & v_z \end{vmatrix} - w_y \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_z & v_z \end{vmatrix} + w_z \begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}$$
en développant par rapport à la troisième colonne. On identifie alors $u \wedge v$ comme le vecteur qui a pour coordonnées $(u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$, ce qui correspond à l'expression connue du produit vectoriel de deux vecteurs en fonction de leurs coordonnées.

**Exercice 2** (Déterminants circulants)**.**

1. *Un cas particulier.* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $J \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

   (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors $X \in \ker J$ si et seulement si la somme des coefficients de $X$ vaut zéro.
   Comme $\phi : X \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ est une forme linéaire non nulle, $\ker J = \ker \phi$ est de dimension $n - 1$ d'après le théorème du rang.
   Pour $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $JV = nV$, donc $V$ n'est pas dans $\ker J$, et donc $\ker J$ et $\mathrm{Vect}\, V$ sont supplémentaires dans $E$.
   Soit $(v_2, \ldots, v_n)$ une base de $\ker J$. La famille $(V, v_2, \cdots, v_n)$ est alors une base de $\mathbb{R}^n$, et la matrice de l'application canonique associée à $J$ dans cette base est égale à $nE_{1,1}$.
   Ceci prouve que $J$ est semblable à $nE_{1,1}$, puisque ces deux matrices représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

   (b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} = bJ + (a - b)I_n$.

Dans la question précédente on a montré qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $PJP^{-1} = nE_{1,1}$.
*Remarque :* $P$ est la matrice de passage de la base canonique dans la base adaptée $(V, v_1, \dots, v_n)$.
Alors $PAP^{-1} = P(bJ + (a-b)I_n)P^{-1} = bPJP^{-1} + (a-b)PP^{-1} = bnE_{1,1} + (a-b)I_n$. Cette dernière matrice est diagonale, donc son déterminant est donné par le produit de ses termes diagonaux. Comme $A$ est semblable à cette dernière matrice, elle a le même déterminant, donc on conclut :

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a - b + bn)(a-b)^{n-1}.$$

(c) Ce déterminant est nul si et seulement si $a = b$ ou $a = b(1-n)$. Si $a = b$, il est clair que la matrice $A$ est non inversible (elle est de rang 1). Si $a = b(1-n)$, alors la somme des coefficients de chaque ligne (ou colonne) s'annule, ce qui donne également une relation de liaison sur les colonnes (ou les lignes) : $C_1 + \dots + C_n = 0$, donc la matrice n'est pas inversible.

2. *Généralisation.* Dans toute la suite, on fixe $n \geq 2$ et $\zeta = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

(a) On commence par visualiser $C = E_{1,n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, si $f$ désigne l'endomorphisme canoniquement associé à $C$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, on a $f(e_i) = e_{i+1}$ si $i \in [\![1, n-1]\!]$ et $f(e_n) = e_1$. Par une récurrence rapide, on montre que si $k \in \mathbb{N}$, $f^k(e_i) = e_{i+k \bmod n}$.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on en déduit que $C^k$, qui est la matrice dans la base canonique de $f^k$, est la matrice par blocs : $C^k = \left(\begin{array}{c|c} 0_{k,n-k} & I_k \\ \hline I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{array}\right)$.
En particulier, $C^n$ est égale à $I_n$ (pour tout $i$, on a $f^n(e_i) = e_i$, donc $f^n$ est l'endomorphisme identité).

(b) Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$. Alors $CX = \omega X \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_n & = & \omega x_1 \\ x_1 & = & \omega x_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} & = & \omega x_n \end{array}\right.$.
Les $(n-1)$ dernières lignes sont équivalentes, en cascade, à $(x_1, \dots, x_{n-1}) = (\omega^{n-1}x_n, \dots, \omega x_n)$. La première égalité donne alors une condition de compatibilité : $x_n = \omega x_1 = \omega^n x_n$, qui est toujours vérifiée puisque $\omega$ est une racine $n$-ième de l'unité.
On a donc $CX = \omega X \iff X \in \mathrm{Vect}((\omega^{n-1}, \dots, \omega, 1))$ qui est une droite vectorielle.
$\boxed{\text{On va noter } X_\omega = (\omega^{n-1}, \dots, \omega, 1) \text{ et } D_\omega = \mathrm{X}_\omega \text{ dans ce qui suit. On a alors } AX_\omega = \omega X}$
Pour montrer que deux droites sont en somme directe, il suffit de montrer qu'elles ne sont pas confondues.
Si $\omega_1 \neq \omega_2$ sont deux racines distinctes de $\mathbb{U}_n$, et si $X \in \mathbb{C}^n$ non nul vérifie $CX = \omega_1 X$, alors $CX \neq \omega_2 X$ donc $X$ est dans $D_{\omega_1}$ et pas dans $D_{\omega_2}$ ; ces droites sont donc en somme directe.

(c) Soit $\zeta = \exp^{2i\pi/n}$, de sorte que $\mathbb{U}_n = \{\zeta^i ; i \in [\![0, n-1]\!]\}$, avec les $\zeta^i$ distincts deux à deux lorsque $i$ parcourt $[\![0, n-1]\!]$.
Montrons à présent par récurrence que $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{n-1}})$ est une famille libre de $\mathbb{C}^n$.
*Initialisation :* On a montré à la précédente question que $(X_1, X_\zeta)$ est une famille libre.

*Hérédité :* Supposons $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{k-1}})$ libre et prouvons que $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^k})$ liée. Comme $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{k-1}})$ est libre, on peut donc écrire $\zeta^k$ comme combinaison linéaire des $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{k-1}})$ : il existe $\mu_1, \dots, \mu_k$ des complexes tels que $\mu_1 X_1 + \cdots + \mu_k X_{\zeta^{k-1}} = X_{\zeta^k}$.
En appliquant $A$ à cette égalité on obtient, puisque $AX_{\zeta^i} = \zeta^i X_{\zeta^i}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\mu_1 X_1 + \mu_2 \zeta X_2 + \dots \mu_k \zeta^{k-1} X_{\zeta^{k-1}} = \zeta^k X_{\zeta^k}$$

En soustrayant à cette égalité $\zeta^k$ fois la précédente, on obtient une relation de liaison entre les $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{k-1}})$ :

$$\mu_1(1-\zeta^k)X_1 + \mu_2(\zeta - \zeta_k)X_\zeta + \cdots + \mu_k(\zeta^{k-1} - \zeta^k)X_{\zeta^{k-1}} = 0$$

Comme pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\zeta^k \neq \zeta^i$, on obtient puisque la famille $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{k-1}})$ est liée (hypothèse de récurrence) que $\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0$ ; autrement dit on a prouvé que $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^k})$ est libre.
*Conclusion :* Par récurrence, on en déduit que $(X_1, X_\zeta, \dots, X_{\zeta^{n-1}})$ est une famille libre de $\mathbb{C}^n$, de cardinal $n = \dim \mathbb{C}^n$.
Dans cette base, la matrice de l'endormorphisme canoniquement associé à $C$ s'écrit $\mathrm{Diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$.
Donc $C$ est semblable à cette matrice diagonale : il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$C = P\,\mathrm{Diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})P^{-1}.$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $C^k$ est semblable à la puissance $k$-ième de cette matrice diagonale, à savoir :

$$C^k = P\left(\mathrm{Diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})\right)^k P^{-1} = P\,\mathrm{Diag}(1, \zeta^k, \dots, \zeta^{k(n-1)})P^{-1}.$$

(d) Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On commence par observer que

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I_n + a_{n-1}C + a_{n-2}C^2 + \cdots a_1 C^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C^{n-k}.$$

On va montrer que $M$ est semblable à une matrice diagonale pour en déduire son déterminant :

$$\begin{aligned} PMP^{-1} &= P\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k C^{n-k}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P C^{n-k} P^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k\,\mathrm{Diag}(1, \zeta^{n-k}, \dots, \zeta^{(n-k)(n-1)}) = \mathrm{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^{n-k}, \dots, \sum_{k=0}^{n-1} a_k \zeta^{(n-k)(n-1)}\right). \end{aligned}$$

On en conclut donc que $M$ a comme déterminant le produit de ces termes diagonaux, ce qui donne

$$\det M = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 \zeta^{jn} + \zeta^{j(n-1)} a_1 + \cdots + \zeta^{2j} a_{n-2} + \zeta^j a_{n-1}\right)$$

On n'obtient pas exaaaactement le résultat demandé dans l'énoncé, mais puisque $\det M^T = \det M$ on peut se convaincre de la réponse finale quand même en échangeant $(a_1, \dots, a_{n-1})$ et $(a_{n-1}, \cdots, a_1)$.