Devoir maison n+1 - Correction
CALCUL MATRICIEL

Exercice 1. Une suite récurrente linéaire d'ordre 3**.**

1. (a) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   (b) On a : $N^2 = 0$, et
$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N,$$
   et de la même manière, on trouve que $ND = N$.

   (c) On a montré que $ND = DN$, donc la formule du binôme de Newton donne, pour $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\begin{aligned} J^n = (D+N)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= D^n + nND^{n-1}, \end{aligned}$$
   car pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0$. D'une part, les puissances de D sont faciles à calculer car D est diagonale. D'autre part, comme $ND = N$, on a que $ND^{n-1} = (ND)D^{n-2} = \cdots = N$, et donc finalement,
$$J^n = D^n + nN = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}.$$
   On note que la formule obtenue convient également pour $n = 0$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par définition,
$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} v_{n+3} \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_{n+2} + 5v_{n+1} - 3v_n \\ v_{n+2} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix} = AV_n$$
   en considérant la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) L'initialisation est vérifiée car $A^0 = I_3$, et si pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$, alors $V_{n+1} = AV_n = AA^n V_0 = A^{n+1} V_0$. Donc, par principe de récurrence, $V_n = A^n V_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3. (a) On cherche à inverser P avec l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -12 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2}{\overset{L_2 \leftarrow -L_2}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

à ce stade on peut constater que la matrice est bien inversible ; on continue l'algorithme pour déterminer son inverse

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{16} L_3}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 12L_3}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 9L_3}{\Longleftrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 7/16 & 9/8 & -9/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\Longleftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/16 & -3/8 & 27/16 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/16 & -1/8 & 1/16 \end{array}\right)$$

On obtient donc l'inverse de P :

$$P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Calculons PJP^{-1} :

$$PJP^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -16 & 80 & -48 \\ 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Alternative : comme on a montré que P est inversible, on peut montrer de manière équivalente, par le calcul, que $AP = PJ$ (cela ne change pas le nombre d'opérations mais la matrice P est un peu plus agréable à multiplier que son inverse car les coefficients sont moins grands).

(c) Comme $A = PJP^{-1}$, on a, par associativité,

$$\begin{aligned} A^2 &= (PJP^{-1})(PJP^{-1}) \\ &= PJ(P^{-1}P)JP^{-1} \\ &= PJ^2P^{-1}. \end{aligned}$$

Montrons alors, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PJ^nP^{-1}$. La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$, mais aussi pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elle est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$A^{n+1} = AA^n = PJP^{-1}PJ^nP^{-1} = PJ^{n+1}P^{-1},$$

donc la propriété est aussi vraie au rang $n+1$. Le principe de récurrence permet alors d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{A^n = PJ^nP^{-1}.}$$

(d) On détermine v_n grâce à la relation $V_n = A^nV_0$. Comme $v_0 = v_1 = 0$, il suffit en fait de déterminer le coefficient en bas à gauche de A^n, qu'on va noter c_n :

$$V_n = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ v_n \end{pmatrix} = A^nV_0 = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ c_n & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ c_n & \star & \star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ c_n \end{pmatrix} \text{ donc } v_n = c_n.$$

Pour déterminer ce coefficient, on utilise les questions précédentes en calculant le moins de coefficients nécessaires possibles (lire la preuve de bas en haut) : on connaît déjà les puissances de J, et donc, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n = PJ^nP^{-1} &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 1 & n+1 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \\ 4n-1+(-3)^n & \star & \star \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\boxed{v_n = c_n = \frac{4n-1+(-3)^n}{16},}$$

qui a pour équivalent simple $\dfrac{(-3)^n}{16}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Matrices nilpotentes.

1. On observe facilement que $N_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis que $N_1^3 = 0$. Plus immédiatement, on a $N_2^2 = 0$. Par contre, $N_3^2 = N_3$, donc il vient par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_3^n = N_3 \neq 0$. Par conséquent, N_1 et N_2 sont nilpotentes, mais N_3 ne l'est pas.

2. Soient M et N deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe des entiers non nuls p et q tel que M^p et N^q sont nulles, et par conséquent M^k est nulle pour tout $k \geq p$, N^k est nulle pour tout $k \geq q$. Comme M et N commutent, on peut appliquer le binôme de Newton :

$$(M+N)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} M^kN^{p+q-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} M^kN^{p+q-k} + \sum_{k=p+1}^{p+q} \binom{p+q}{k} M^kN^{p+q-k}.$$

Dans le terme de droite, la deuxième somme est nulle car M^k est nulle pour tout $k \geq p+1$. La première somme est nulle car si $k \in [\![0,p]\!]$, $p+q-k \geq q$ et donc N^{p+q-k} est nul pour chaque k entre 0 et p. Donc $M+N$ est nilpotente.

Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes mais leur somme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas puisque son carré (et par suite toutes ses puissances paires) est la matrice identité. L'hypothèse de commutativité ne peut donc pas être omise.

3. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.
   (a) On obtient une somme télescopique :
   $$(I_n - B)(I_n + B + \cdots + B^p) = (I_n - B)\sum_{k=0}^{p} B^k = \sum_{k=0}^{p} \left(B^k - B^{k+1}\right) = I_n - B^{p+1}.$$
   (b) Si B est nilpotente, il existe un entier p tel que B^{p+1} est nul, et alors $(I_n - B)(I_n + B + \cdots + B^p) = I_n$ d'après la question précédente. Comme ce sont des matrices carrées, on en déduit que $I_n - B$ est inversible, d'inverse $\sum_{k=0}^{p} B^k$.

4. (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec A inversible. Alors comme A est inversible,
   $$AB = BA \iff ABA^{-1} = B \iff BA^{-1} = A^{-1}B$$
   donc A et B commutent si et seulement si A^{-1} et B commutent.

   (b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, avec A inversible et B nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier p tel que B^p est nulle. Comme A et B commutent, d'après la question précédente A^-1 et B commutent aussi et par conséquent $(A^{-1}B)^p = (A^{-1})0B^p$ est la matrice nulle, donc $A^{-1}B$ est aussi une matrice nilpotente.

5. Soient A et N des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec N nilpotente, et supposons que A est inversible. Alors d'après la question précédente, $A^{-1}N$ est une matrice nilpotente, et son opposé $-A^{-1}N$ est alors aussi nilpotente. La question 3b donne alors que $I_n + A^{-1}N$ est inversible. Alors $A + N = A(I_n + A^{-1}N)$ est le produit de deux matrices inversibles, donc $A + N$ est inversible.
   Réciproquement, supposons que $A + N$ est inversible. On peut appliquer le sens direct que l'on vient de démontrer, à $\tilde{A} = A + N$ et $\tilde{N} = -N$ qui commutent encore, et sont respectivement des matrices inversibles et nilpotentes, pour obtenir que $\tilde{A} + \tilde{N} = A$ est inversible.

6. Pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la *matrice exponentielle* de N, par la formule
   $$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!}.$$
   (a) Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente, il existe un entier non nul p tel que N^p est nulle, et donc pour tout $k \geq p$, N^k est également nulle. Les termes de la somme définissant l'exponentielle de N sont donc tous nuls à partir du rang $k = p$, et la somme est en fait une somme finie.

   (b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, on note encore p un entier non nul tel que N^p est nulle, et l'exponentielle s'écrit alors $\exp(N) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + N + \frac{1}{2}N^2 \cdots \frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$. Comme N est nilpotente, toutes ses puissances le sont aussi. On a montré à la question 2 que la somme de deux matrices nilpotentes était nilpotente, et par conséquent une récurrence immédiate donne que la somme de plusieurs matrices nilpotentes est encore nilpotente. Donc $N+\frac{1}{2}N^2\cdots\frac{1}{(p-1)!}N^{p-1}$ est nilpotente, son opposé l'est encore, et en appliquant la question 3b on obtient donc que $\exp(N)$ est inversible.

(c) On observe que $\exp(0_n)=I_n$, par analogie avec l'exponentielle réelle.

(d) Comme N_1^3 et N_2^2 sont nulles, on a :

$$\exp(N_1)=I_3+N_1+\frac{1}{2}N_1^2=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\exp(N_2)=I_2+N_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

(e) Soient M et N deux matrices nilpotentes qui commutent. Il existe des entiers non nuls p et q tel que M^p et N^q sont nulles, et par conséquent M^k est nulle pour tout $k\geq p$, N^k est nulle pour tout $k\geq q$. On a montré un peu plus haut que $(N+M)^{p+q}$ est nulle. On calcule l'exponentielle de $N+M$ en appliquant le binôme de Newton (c'est possible car M et N commutent) :

$$\exp(N+M)=\sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}(N+M)^k=\sum_{k=0}^{p+q}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}N^iM^{k-i}=\sum_{k=0}^{p+q}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}N^iM^{k-i}$$

on échange les sommes - comme $i\leq k,$ on obtient $k\geq i$:

$$=\sum_{i=0}^{p+q}\sum_{k=i}^{p+q}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}N^iM^{k-i}=\sum_{i=0}^{p+q}N^i\sum_{k=i}^{p+q}\frac{1}{k!}\binom{k}{i}M^{k-i}=\sum_{i=0}^{p+q}N^i\sum_{l=0}^{p+q-i}\frac{1}{(l+i)!}\binom{l+i}{i}M^l.$$

Or $\frac{1}{(l+i)!}\binom{l+i}{i}=\frac{1}{i!l!}$, donc on peut factoriser la somme intérieure par $\frac{1}{i!}$, et il vient

$$\exp(N+M)=\sum_{i=0}^{p+q}\frac{1}{i!}N^i\sum_{l=0}^{p+q-i}\frac{1}{l!}M^l=\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{i!}N^i\sum_{l=0}^{p+q-i}\frac{1}{l!}M^l,$$

puisque N^i est nul si $i\geq q$. Comme pour tout $i\in[\![0,q]\!]$, $p+q-i\geq p$, $\sum_{l=0}^{p+q-i}\frac{1}{l!}M^l=\exp(M)$, et on peut donc factoriser à droite :

$$\exp(N+M)=\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{i!}N^i\sum_{l=0}^{p+q-i}\frac{1}{l!}M^l=\left(\sum_{i=0}^{q}\frac{1}{i!}N^i\right)\exp(M)=\exp(N)\exp(M).$$

(f) Si N est nilpotente, $-N$ l'est encore ; comme N et $-N$ commutent, la question précédente s'applique et on obtient $\exp(N)\exp(-N)=\exp(N-N)=\exp(0_n)=I_n$. Donc l'inverse de l'exponentielle d'une matrice nilpotente, c'est l'exponentielle de sa matrice opposée, ce qui est cohérent avec l'exponentielle réelle : $(\exp(N))^{-1}=\exp(-N)$.