Devoir de révisions n+2
DÉRIVATION

Problème 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, et soient $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$.

I. 1. Déterminer $p,\ q,\ r \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, \quad g(x) = f(x) - p(x-b)(x-c) - q(x-a)(x-c) - r(x-a)(x-b)$$

s'annule en a, b et c. Dans la suite, p, q, r gardent ces valeurs.

2. En déduire qu'il existe $\alpha < \beta \in]a, c[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

3. En déduire qu'il existe $\gamma \in\ I$ tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\gamma).$$

Justifier que ce résultat reste valable quel que soit l'ordre de a, b, c.

II. 1. Soit $h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

i. Quel est le domaine de définition de h ? Montrer qu'on peut prolonger h par continuité sur $\mathbb{R}$.

ii. En appliquant la propriété démontrée en I.3. à $f = \sin$ et à $c = 0$, montrer que la fonction h est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. En étudiant la fonction $j : x \mapsto x^2 - \sin(x)$, montrer que l'équation $\sin(x) = x^2$ a deux solutions sur $\mathbb{R}$, dont une évidente. On appelle δ l'autre solution. Montrer que $\delta \in [0, 1]$.

III. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1]$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \delta| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \delta|$, puis que $|u_n - \delta| \leq \dfrac{1}{2^n}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge vers δ. À partir de quel rang n le terme u_n est-il une valeur approchée de δ à 10^{-3} près ?