Devoir de révisions n+2 - Correction
DÉRIVATION

I. 1. On a $g(a) = f(a) - p(a-b)(a-c)$, donc $p = \dfrac{f(a)}{(a-b)(a-c)}$ convient.
De même, $q = \dfrac{f(b)}{(b-a)(b-c)}$ et $r = \dfrac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$ conviennent.

2. Comme g est continue et dérivable sur $[a, c]$ et que $g(a) = g(b) = g(c) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\alpha \in]a, b[$ et $\beta \in]b, c[$ tels que $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$.

3. À nouveau d'après le théorème de Rolle appliqué à g' continue et dérivable sur $[\alpha, \beta]$, comme $g'(\alpha) = g'(\beta) = 0$, il existe $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $g''(\gamma) = 0$. Or :

$$\forall x \in I,\ g''(x) = f''(x) - 2(p + q + r),$$

donc $p + q + r = \dfrac{1}{2} f''(\gamma)$, c'est-à-dire la formule voulue. Cette formule étant symétrique en a, b, c, elle est valable quel que soit l'ordre de a, b, c.

II. 1. i. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$, et $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc h se prolonge sur $\mathbb{R}$ en :

$$\tilde{h} : x \mapsto \begin{cases} h(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

ii. Comme $\sin$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après la propriété démontrée en I.3., pour tous $a < b \in \mathbb{R}^*$, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{\sin a}{(a-b)a} + \frac{\sin(b)}{(b-a)b} = -\frac{1}{2}\sin(\gamma),$$

c'est-à-dire : $\dfrac{h(a) - h(b)}{a - b} = -\dfrac{1}{2}\sin(\gamma)$, et donc :

$$|h(a) - h(b)| \leq \frac{1}{2}|\sin(\gamma)||a - b| \leq \frac{1}{2}|a - b|.$$

Cette inégalité reste valable pour a ou $b = 0$ par passage à la limite, donc $\tilde{h}$ est $\dfrac{1}{2}$-lipschitzienne.

2. Soit $j : x \mapsto x^2 - \sin(x)$. La fonction j est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R},\ j'(x) = 2x - \cos(x)$, puis $j''(x) = 2 + \sin(x) > 0$. La fonction j' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $j'(0) = -1 < 0$ et $j'(1) = 2 - \cos(1) > 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $d \in [0, 1]$ tel que $j'(d) = 0$.
La fonction j est donc strictement décroissante sur $]-\infty, d]$ et strictement croissante sur $[d, +\infty[$. Comme $j(0) = 0$, on a $j(d) < 0$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, j s'annule exactement une fois sur $]-\infty, d]$ (en 0) et une fois sur $[d, +\infty[$ (en δ). Comme $j(1) = 1 - \sin(1) > 0$, on a $\delta \in [d, 1]$.

III. 1. On raisonne par récurrence : $u_0 = 1 \in]0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \in]0,1]$. Alors, comme : $\forall x \in]0,1],\ 0 < \sin(x) \leq x$, on a $0 < \sin(u_n) \leq u_n$, donc $u_{n+1} \in]0,1]$. Donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1]$.

2. Par définition, δ est un point fixe de la fonction $\tilde{h}$. D'après II.1.ii, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \delta| = |h(u_n) - h(\delta)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \delta|,$$

et donc, par récurrence immédiate, $|u_n - \delta| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \delta| \leq \frac{1}{2^n}$.

3. Comme $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \delta$. De plus :

$$\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3} \Leftrightarrow -n\ln(2) \leq -3\ln(10) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(10)}{\ln(2)} = \log_2(10).$$

Donc u_n est 10^{-3}-proche de δ à partir du rang $N = E\left(\log_2(10)\right) + 1$.