Devoir maison n+3

Exercice 1. Déterminer $\lim_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\sin x} - (\text{ch } x)^2}{x \text{sh }^2(x)}$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle notée (E) suivante :

$$(1+x^2)y' - xy = 1 + x.$$

1. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E). On cherchera une solution particulière sous forme polynomiale de degré 1.

   (b) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, déterminer la solution notée g_k de (E) telle que $g_k(1) = k\sqrt{2}$.
   On vérifiera que la fonction g_k obtenue est bien une solution de (E) et que $g_k(1) = k\sqrt{2}$, car la suite en dépend !

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_k$ le graphe de g_k et $\mathcal{D}_k$ la tangente à son graphe au point d'abscisse 1 (dans le plan muni d'un repère orthonormé).

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{R}$, déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{D}_k$.

   (b) Démontrer que les droites $\mathcal{D}_k$, pour tous les $k \in \mathbb{R}$, sont concourantes en un point A dont on donnera les coordonnées cartésiennes.

Soit $k \in \mathbb{R}$.

3. (a) Vérifier que g_k est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée seconde.

   (b) En fonction de $k \in \mathbb{R}$, déterminer la position relative globale de $\mathcal{C}_k$ par rapport à $\mathcal{D}_k$.

4. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$.

   (b) Montrer qu'il existe des constantes a, b, $c \in \mathbb{R}$, dépendant éventuellement de k, telles que

   $$g_k(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x \to +\infty}{o}(\frac{1}{x})$$

   En déduire le graphe $\mathcal{C}_k$ admet une droite asymptote en $+\infty$ dont on déterminera une équation cartésienne. Quelle est la position de $\mathcal{C}_k$ par rapport à cette asymptote ?

   (c) On admet que

   $$g_k(x) = (1-k)x - 1 - \frac{k}{2x} + \underset{x \to -\infty}{o}(\frac{1}{x}).$$

   Déterminer une équation cartésienne de la droite asymptote au graphe $\mathcal{C}_k$ en $-\infty$, ainsi que la position du graphe relativement à cette asymptote.

5. Tracer sur un même dessin les représentations graphiques des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_{-1}$ en tenant compte et en faisant apparaître les résultats obtenus.

Exercice 3. On considère un dé A dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et sept dés peints $D_1, \dots, D_7$ tels que pour tout $i \in [\![1, 7]\!]$, le dé D_i possède $i - 1$ faces blanches et $7 - i$ faces noires. On suppose que tous les dés sont équilibrés. On lance le dé A. Ensuite :

- si le résultat du lancer est $2, 3, 4, 5$ ou 6, on note j ce résultat,
- si le résultat du lancer est 1, on relance le dé A :
  - si le résultat du deuxième lancer est 1, 2 ou 3, on note $j = 1$,
  - si le résultat du deuxième lancer est 4, 5 ou 6, on note $j = 7$.

On choisit ainsi un dé peint D_j. On lance alors le dé D_j plusieurs fois de suite.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir une face blanche au premier lancer du dé peint est égale à $\dfrac{1}{2}$.
2. Sachant que les deux premiers lancers du dé peint ont eu pour résultat une face noire, calculer la probabilité d'obtenir une face blanche au troisième lancer.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité P_n d'obtenir une face blanche au $n^{\text{ème}}$ lancer du dé peint, sachant que les lancers précédents ont donné une face noire.
4. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. Interpréter.