Devoir maison n+3

Exercice 1. On sait que :

- $(1+x)^{\sin x} = e^y$ où :

$$\begin{array}{rcl} y & = & \sin(x)\ln(1+x) \\ & \underset{x\to 0}{=} & \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & x^2 - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{array}$$

  d'où

$$\begin{array}{rcl} (1+x)^{\sin x} & \underset{y\to 0}{=} & 1 + y + \dfrac{y^2}{2} + o(y^2) \\ & \underset{x\to 0}{=} & 1 + x^2 - \dfrac{x^3}{2} + o(x^3), \end{array}$$

- et :

$$\begin{array}{rcl} (\operatorname{ch} x)^2 & \underset{x\to 0}{=} & \left(1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 \\ & \underset{x\to 0}{=} & 1 + x^2 + o(x^3), \end{array}$$

d'où, comme $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$:

$$\frac{(1+x)^{\sin x} - (\operatorname{ch} x)^2}{x\operatorname{sh}^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)}{x\operatorname{sh}^2(x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{x^3}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2. 1. (a) L'équation différentielle (E) est linéaire du premier ordre et non homogène.
L'équation homogène associée à (E) est $(1+x^2)y' - xy = 0$, ou de manière équivalente (puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \neq 0$), $y' - \dfrac{x}{1+x^2}y = 0$, que l'on note (H). Elle est de la forme $y' + a(x)y = 0$ avec $a : x \mapsto -\dfrac{x}{1+x^2}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}$ est la fonction $A : x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Donc l'ensemble des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sqrt{1+x^2} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche une solution particulière de (E) sous forme polynomiale de degré 1. Soit $f : x \mapsto ax+b$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)f'(x) - xf(x) = 1+x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, (1+x^2)a - x(ax+b) = 1+x \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathbb{R}, a - bx = 1+x \\ & \Leftrightarrow & a = 1 \text{ et } b = -1 \end{array}$$

par identification des coefficients de deux fonctions polynomiales égales. La fonction $f_0 : x \mapsto x-1$ est donc une solution particulière de (E).
L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) est donc

$$\mathcal{S}(E) = \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sqrt{1+x^2} + x - 1 \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{R}$.
Soit $g \in \mathcal{S}(E)$. D'après ce qui précède, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda\sqrt{1+x^2} + x - 1$.
On a les équivalences suivantes :

$$g(1) = k\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\sqrt{2} = k\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = k.$$

D'après ces équivalences, l'unique solution g_k de (E) telle que $g_k(1) = k\sqrt{2}$ est la fonction

$$g_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & k\sqrt{1+x^2} + x - 1 \end{array}$$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{R}$. Par définition, $g_k(1) = k\sqrt{2}$. De plus, g_k est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) donc c'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k'(x) = k\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + 1 = \dfrac{kx}{\sqrt{1+x^2}} + 1$.
Donc $g_k'(1) = \dfrac{k}{\sqrt{2}} + 1$. On en déduit qu'une équation cartésienne de la tangente $\mathcal{D}_k$ au graphe de g_k au point d'abscisse 1 est

$$y = \left(\frac{k}{\sqrt{2}} + 1\right)(x-1) + k\sqrt{2}.$$

(b) On raisonne par analyse-synthèse.
S'il existe un point A de coordonnées cartésiennes (x_A, y_A) commun à toutes les droites $\mathcal{D}_k$ pour tout $k \in \mathbb{R}$ alors a fortiori $A \in \mathcal{D}_0$ et $A \in \mathcal{D}_1$.
Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = x_A - 1, \\ y_A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\right)(x_A - 1) + \sqrt{2}, \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = x_A - 1, \\ 0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_A - 1) + \sqrt{2}, \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = x_A - 1, \\ x_A = -2 + 1, \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} y_A = -2, \\ x_A = -1. \end{array} \right.$$

Synthèse : on vérifie que $\forall k \in \mathbb{R}$, $\left(\dfrac{k}{\sqrt{2}} + 1\right)(-1-1) + k\sqrt{2} = -k\sqrt{2} - 2 + k\sqrt{2} = -2$ donc $A \in \mathcal{D}_k$.
On en conclut que le point A de coordonnées cartésiennes $(-1, -2)$ est un point de concours de toutes les droites $\mathcal{D}_k$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

3. (a) Les fonctions $x \mapsto 1 + x^2$ et $x \mapsto x - 1$ sont polynomiales donc 2-fois dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \in \mathbb{R}_+^*$. Par composition, multiplication par k puis somme, la fonction g_k est 2-fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'après les calculs de 2.(a), $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k'(x) = kx(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1$ puis $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k''(x) = k(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + kx \times 2x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = (k(1+x^2) - kx^2)(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} = k(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.

(b) $\star$ Si $k > 0$ alors d'après 3.(a), $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k''(x) = k(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$ donc la fonction g_k est convexe sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, les tangentes à son graphe, et notamment $\mathcal{D}_k$, sont situées en-dessous du graphe $\mathcal{C}_k$.
$\star$ Si $k = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = g_0(x) = x - 1$ donc le graphe $\mathcal{C}_0$ est une droite et donc la tangente $\mathcal{D}_0$ est confondue avec $\mathcal{C}_0$.
$\star$ Si $k < 0$ alors d'après 3.(a), $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k''(x) = k(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} < 0$ donc la fonction g_k est concave sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, les tangentes à son graphe, et notamment $\mathcal{D}_k$, sont situées en-dessus du graphe $\mathcal{C}_k$.

4. (a) On compose le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction $u \mapsto \sqrt{1+u}$ avec $t \mapsto t^2$ qui tend bien vers 0 en 0 :

$$\sqrt{1+t^2} \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2).$$

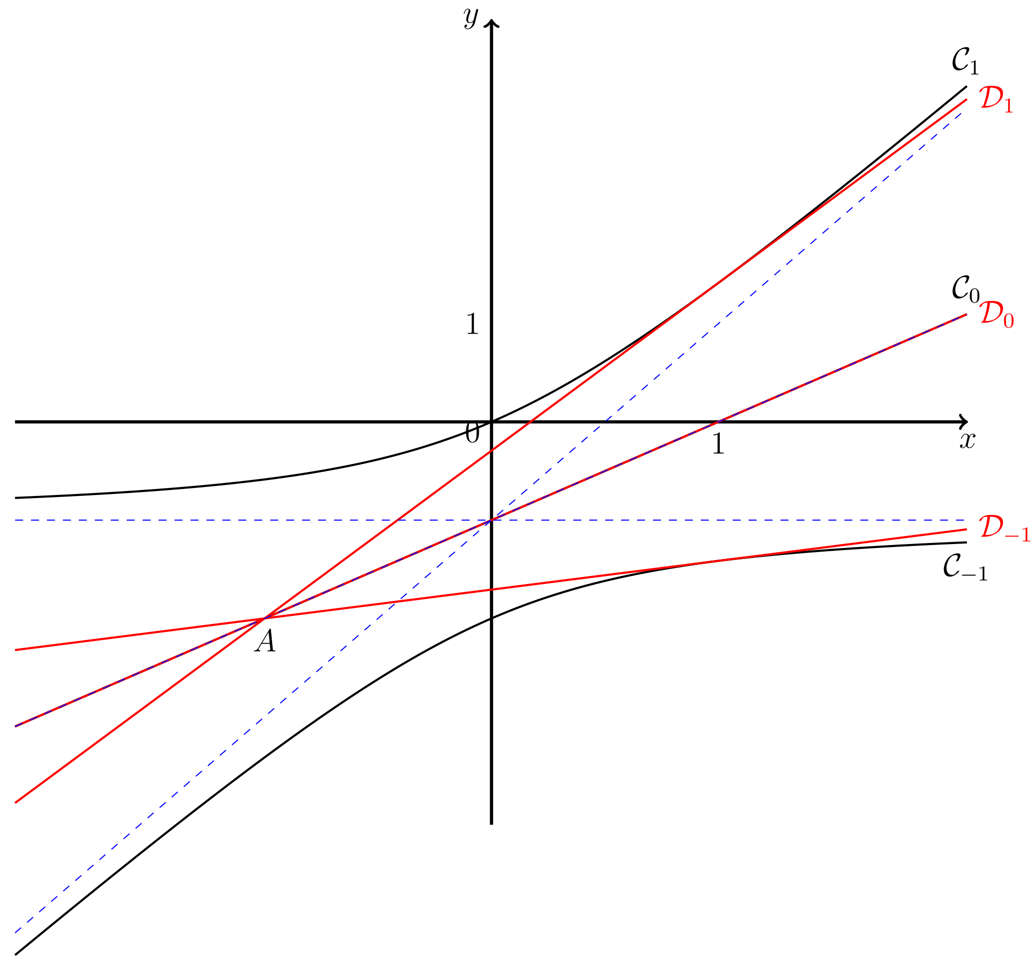
(b) On pose le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ pour lequel $(x \to +\infty) \Leftrightarrow (y \overset{>}{\to} 0)$. Avec ce changement de variable, pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
g_k(x) &= k\sqrt{1+x^2} + x - 1\\
&= k\sqrt{1+\frac{1}{y^2}} + \frac{1}{y} - 1\\
&= k \times \frac{1}{y}\sqrt{y^2+1} + \frac{1}{y} - 1 \qquad \text{car } x > 0 \text{ donc } y > 0 \text{ donc } \sqrt{\frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y}\\
&= \frac{1}{y}(k\sqrt{y^2+1} + 1 - y)\\
&\underset{y\to 0}{=} \frac{1}{y}\left(k(1+\frac{1}{2}y^2 + o(y^2)) + 1 - y\right)\\
&\underset{y\to 0}{=} (k+1)\frac{1}{y} - 1 + \frac{k}{2}y + o(y)\\
&\underset{x\to +\infty}{=} (k+1)x - 1 + \frac{k}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\underset{x\to +\infty}{=} (k+1)x - 1 + \frac{k}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x) - ((k+1)x - 1) = 0$ c'est-à-dire que la droite d'équation cartésienne $y = (k+1)x - 1$ est une asymptote au graphe de g_k en $+\infty$. Comme le terme suivant dans le développement asymptotique de g_k est du même signe que k, $\mathbb{C}_k$ est situé au dessus de l'asymptote à l'infini si k est strictement positif, en-dessous si k est strictement négatif. Si k est nul, $\mathcal{C}_0$ est une droite, confondue avec son asymptote à l'infini.

(c) D'après l'énoncé, $g_k(x) = (1-k)x - 1 - \dfrac{k}{2x} + \underset{x\to-\infty}{o}(\dfrac{1}{x})$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g_k(x) - ((1-k)x - 1) = 0$. Par conséquent, la droite d'équation cartésienne $y = (1-k)x - 1$ est une asymptote au graphe de g_k en $-\infty$. Si $k < 0$, $\mathbb{C}_k$ est situé au dessus de l'asymptote à l'infini si k est strictement positif, et en dessous si k est strictement positif. Si k est nul, l'équation de l'asymptote correspond bien à l'équation de $\mathcal{C}_0$.

5.



Exercice 3. 1. Par symétrie du problème, l'événement B_1 : "obtenir une face blanche au premier lancer" a la même probabilité que $\overline{B}_1$: "obtenir une face noire au premier lancer ". Comme ces deux événements forment un système complet, ils ont tous les deux une probabilité $\frac{1}{2}$ de se produire.

On peut retrouver ce résultat par le calcul : notons, pour tout $k \in [\![1, 7]\!]$, C_k l'événement : "avoir choisi le dé D_k". Le dé A étant équilibré, on a :

$$\forall k \in [\![2, 6]\!],\ \mathbb{P}(C_k) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(C_1) = \mathbb{P}(C_7) = \frac{1}{12}.$$

D'après la formule des probabilités totales, on a alors :

$$\mathbb{P}(B_1) = \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(C_k \cap B_1) = \frac{1}{12} \times 0 + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \times \frac{k-1}{6} + \frac{1}{12} \times 1 = \frac{1}{2}.$$

2. Notons N_2 l'événement : "les deux premiers lancers du dé peint ont eu pour résultat une face noire". Avec les notations de la question 1, on veut calculer $\mathbb{P}_{N_2}(B_3) = \dfrac{\mathbb{P}(N_2 \cap B_3)}{\mathbb{P}(N_2)}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(N_2) = \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(C_k \cap N_2) = \frac{1}{12} \times 1^2 + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \times \left(\frac{7-k}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \times 0^2 = \frac{73}{216},$$

et :

$$\mathbb{P}(N_2 \cap B_3) = \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(C_k \cap N_2 \cap B_3) = \frac{1}{12} \times 1^2 \times 0 + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \times \left(\frac{7-k}{6}\right)^2 \times \frac{k-1}{6} + \frac{1}{12} \times 0^2 \times 1 = \frac{35}{432},$$

d'où : $\mathbb{P}_{N_2}(B_3) = \dfrac{35}{432} \times \dfrac{216}{73} = \dfrac{35}{146}$.

3. Avec les mêmes notations, le même raisonnement donne :

$$\mathbb{P}(N_n) = \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(C_k \cap N_n) = \frac{1}{12} \times 1^n + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \times \left(\frac{7-k}{6}\right)^n + \frac{1}{12} \times 0^n = \frac{1}{12} + \frac{1}{6^{n+1}} \sum_{k=1}^{5} k^n,$$

et :

$$\mathbb{P}(N_n \cap B_{n+1}) = \frac{1}{12} \times 1^n \times 0 + \sum_{k=2}^{6} \frac{1}{6} \times \left(\frac{7-k}{6}\right)^n \times \frac{k-1}{6} + \frac{1}{12} \times 0^n \times 1 = \frac{1}{6^{n+1}} \sum_{k=1}^{5} k^n \times (5-k),$$

d'où : $P_n = \mathbb{P}_{N_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1^n \times 5 + 2^n \times 4 + 3^n \times 3 + 4^n \times 2 + 5^n \times 1}{3 \times 6^{n-1} + (1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n)}$.

4. On a $P_n \underset{n \to +\infty}{\sim} 2 \times \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $P_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet, lorsque n devient grand, sachant N_n, la probabilité d'avoir choisi le dé D_1 (peint en noir) tend vers 1, et la probabilité d'obtenir une face blanche avec ce dé est nulle.