Devoir maison n+4

Échauffement : un développement limité à l'aide d'une équation différentielle

On définit $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array} \right.$

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.
2. Déterminer une fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) + h(x)f(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$
3. Déterminer un DL à l'ordre 4 de h en 0.
4. En déduire un DL à l'ordre 5 de f en 0.

Problème : Une suite de polynômes adaptée à un opérateur différentiel

Dans tout ce problème, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes réels

$$Q_n = (X^2-1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)}.$$

Attention à ce qui est écrit (et notamment à la présence de parenthèses dans les exposants) :
Q_n est la **puissance** n**-ième** de X^2-1, mais L_n est défini en fonction de la **dérivée** n**-ième** de Q_n...

Propriétés de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme Q_n.
   (b) En déduire le degré et le coefficient dominant du polynôme L_n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer rapidement la parité de la fonction polynomiale $x \mapsto L_n(x)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   (a) En écrivant $Q_n = (X-1)^n\,(X+1)^n$, exprimer L_n comme une combinaison linéaire de polynômes de la forme $(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ (pour k variant entre 0 et n).

   (b) Montrer $L_n(1) = 1$ et déterminer $L_n(-1)$.

5. **Racines de L_n.** Soit $n \geq 1$.

   (a) Déterminer les racines de Q_n, avec leur multiplicité.

   (b) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $H(k)$ l'assertion « il existe un réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et une liste de k réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k < 1$ tels que $Q_n^{(k)} = \lambda\,(X^2-1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$. »
   Montrer $\forall k \in [\![1, n]\!], H(k)$ par récurrence finie.

   (c) En déduire qu'il existe n réels $-1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < 1$ tels que
   $$L_n = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k) \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1, n]\!], \alpha_k + \alpha_{n+1-k} = 0.$$

   (d) À quelle condition le nombre 0 est-il racine de L_n ?

Spectre d'un opérateur différentiel

Dans cette partie, on considère l'application
$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & ((X^2-1)P')' = (X^2-1)P'' + 2X\,P'. \end{array} \right.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable sous ϕ, c'est-à-dire que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

7. Déterminer l'ensemble $\left\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\middle|\, \phi(P) = 0 \right\}$.

8. On veut montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que, pour tout entier naturel n, $\phi(L_n) = \lambda_n\,L_n$.

   (a) Montrer cette propriété pour $n \in \{0, 1, 2\}$, en explicitant les λ_n associés.

   (b) On suppose maintenant $n \geq 2$.

      i. Montrer $(X^2-1)Q_n' = 2n\,X\,Q_n$.

      ii. En dérivant $n+1$ fois la relation précédente, conclure.

9. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\phi(P) = \lambda P$.

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k\,L_k$.

   (b) Conclure.

Bonnes vacances !