Devoir maison n+4

Échauffement : un développement limité à l'aide d'une équation différentielle

On définit $f : \begin{cases}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \end{cases}$

1. La fonction $\arcsin$ est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. La fonction $x \mapsto 1-x^2$ est C^∞ et ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Donc par quotient de fonctions C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas, f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

2. Si $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}^3} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2} f(x)$$
donc si on définit $\boxed{h : x \to -\frac{x}{1-x^2}}$ pour $x \in]-1,1[$, on a $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) + h(x)f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

3. La fonction h est de classe C^∞ donc elle admet des DL à tout ordre en 0. Elle est impaire donc tous ses termes d'ordre pair sont nuls, et son DL à l'ordre 4 ne présente que les termes d'ordre 1 et 3. Allons-y : si $x \in]-1,1[$,
$$h(x) = -\frac{x}{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} -x\left(1+x^2+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \boxed{-x - x^3 + o(x^4).}$$
On a écrit un $o(x^3)$ à la première étape étant donné que la quantité $\dfrac{1}{1-x^2}$ est paire, et le terme d'ordre 3 dans son DL en 0 est donc nécessairement nul.

4. Comme f est de classe C^∞, elle admet des DL à tout ordre en 0. Elle est impaire donc tous ses termes d'ordre pair sont nuls, et son DL à l'ordre 5 ne présente que les termes d'ordre 1 et 3 et 5. Ce sera en fait même un DL à l'ordre 6. On détermine le premier terme du DL en déterminant l'équivalent de f :
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{1} \underset{x\to 0}{\sim} x$$
donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que le DL de f s'écrit $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + ax^3 + bx^5 + o(x^5)$. Comme le DL en 0 de f' existe à tout ordre (puisque f' est C^∞), c'est la dérivée du DL de f : $f'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + o(x^4)$. Pour atteindre les coefficients a et b, il va être suffisant d'injecter nos DL dans l'équation différentielle en considérant toutes les expressions à l'ordre 4 :
$$\begin{aligned}\underbrace{1+x^2+x^4+o(x^4)}_{\frac{1}{1-x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \underbrace{1+3ax^2+5bx^4+o(x^4)}_{f'(x)} + \underbrace{\left(-x-x^3+o(x^4)\right)}_{h(x)}\underbrace{\left(x+ax^3+o(x^4)\right)}_{f(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + (3a-1)x^2 + (5b-a-1)x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$
En identifiant les coefficients de ces DL, on obtient $3a-1=1$ donc $a = \dfrac{2}{3}$ et $5b-a-1=1$ donc $b = \dfrac{8}{15}$.
Conclusion : Le DL à l'ordre 5 (et même 6 par imparité) de f est donc
$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{8}{15}x^5 + o(x^6).}$$

Problème : Une suite de polynômes adaptée à un opérateur différentiel

Dans tout ce problème, étant donné un entier $n \in \mathbb{N}$, on définit les polynômes réels

$$Q_n = (X^2 - 1)^n \qquad \text{et} \qquad L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)}.$$

Propriétés de la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. On a
   - $Q_0 = (X^2 - 1)^0 = 1$, donc $L_0 = \dfrac{1}{2^0 \cdot 0!} Q_0^{(0)} = 1$.
   - $Q_1 = X^2 - 1$, donc $L_1 = \dfrac{1}{2^1 \cdot 1!} Q_1' = \dfrac{2X}{2} = X$.
   - $Q_2 = (X^2 - 1)^2 = X^4 - 2X^2 + 1$, donc $L_2 = \dfrac{1}{2^2 \cdot 2!} Q_2'' = \dfrac{1}{8}(12X^2 - 4) = \dfrac{3}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Le degré d'un produit étant la somme des degrés, le degré de Q_n est $n \deg(X^2 - 1) = 2n$.
   Le coefficient dominant d'un produit étant le produit des coefficients dominants, le coefficient dominant de Q_n est $\operatorname{coeff}_{2n}(Q_n) = \big(\operatorname{coeff}_2(X^2 + 1)\big)^n = 1^n = 1$.

   (b) D'après la question précédente, on peut trouver un polynôme R_n de degré $< 2n$ tel que l'on puisse écrire $Q_n = X^{2n} + R_n$.
   En dérivant n fois, on a donc $Q_n^{(n)} = (2n) \cdots (n+1) X^n + R_n^{(n)} = \dfrac{(2n)!}{n!} X^n + R_n^{(n)}$, puis

   $$L_n = \frac{1}{2^n\, n!} Q_n^{(n)} = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{(2n)!}{n!} X^n + \frac{1}{2^n\, n!} R_n^{(n)}.$$

   On sait que $\deg R_n^{(n)} \leq \deg R_n - n < n$, donc ce calcul montre que L_n est de degré n et de coefficient dominant

   $$\frac{1}{2^n\, n!} \frac{(2n)!}{n!} = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto Q_n(x)$ est manifestement paire, par opérations.
   La dérivation envoyant les fonctions paires sur les fonctions impaires, et réciproquement, on en déduit que $Q_n^{(n)}$, et donc L_n, sont « de la même parité que n ».
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) On applique la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} Q_n^{(n)} &= \left[(X-1)^n\,(X+1)^n\right]^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[(X-1)^n\right]^{(k)}\left[(X+1)^n\right]^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{n\cdots(n-k+1)}_{=n!/(n-k)!}(X-1)^{n-k}\;\underbrace{n\cdots(k+1)}_{=n!/k!}(X+1)^k \end{aligned}$$

$$\text{donc}\qquad \begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2^n\,n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!^2}{k!(n-k)!}(X-1)^{n-k}(X+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^{n-k}(X+1)^k. \end{aligned}$$

(b) On déduit du calcul précédent que

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\underbrace{(1-1)^{n-k}}_{=0\text{ si }k\neq n}(1+1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{n}^2 0^0\cdot 2^n = \frac{2^n}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

D'après la question 3, on en déduit $L_n(-1)=(-1)^n$.

5. **Racines de L_n.** Soit $n\geq 1$.

(a) L'expression $Q_n=(X-1)^n\,(X+1)^n$ montre directement que, si $n\geq 1$, les racines de Q_n sont -1 et 1, avec multiplicité n dans les deux cas.
Naturellement, $Q_0=1$ n'a pas de racine.

(b) **Initialisation.** On a $Q_n'=n\,(X^2-1)'(X^2-1)^{n-1}=2nX(X^2-1)^{n-1}$, ce qui montre $H(1)$: les réels $\lambda=2n$ et $\alpha_1=0$ conviennent.
(On pourrait utiliser un argument moins concret, très semblable à celui de l'hérédité, mais on a préféré ici être direct.)
Hérédité. Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $H(k)$.
On peut donc trouver $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{R}^*$ et $-1<\widetilde{\alpha}_1<\cdots<\widetilde{\alpha}_k<1$ tels que

$$Q_n^{(k)}=\lambda(X^2-1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)=\lambda(X+1)^{n-k}\,(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)(X-1)^{n-k}.$$

Montrons $H(k+1)$.

- Comme $k<n$, les réels -1 et 1 sont racines de $Q_n^{(k)}$, de multiplicité $n-k$ dans les deux cas. On en déduit que

$$\mu_{\pm1}(Q_n^{(k+1)})=\mu_{\pm1}(Q_n^{(k)})-1=n-k-1=n-(k+1).$$

- Soit $\ell\in[\![1,k-1]\!]$. En appliquant le théorème de Rolle (sous sa forme faible et provisoire) à la fonction (de classe C^1) $x\mapsto Q_n^{(k)}(x)$ entre $\widetilde{\alpha}_\ell$ et $\widetilde{\alpha}_{\ell+1}$, on obtient l'existence d'un nombre réel $\alpha_{\ell+1}\in\,]\widetilde{\alpha}_\ell,\widetilde{\alpha}_{\ell+1}[$ tel que $Q_n^{(k+1)}(\alpha_{\ell+1})=0$.
En appliquant le même argument entre -1 et $\widetilde{\alpha}_1$ (resp. entre $\widetilde{\alpha}_k$ et 1), on obtient une nouvelle racine α_1 (resp. α_{k+1}) de $Q_n^{(k+1)}$.

Notons que l'on a les inégalités

$$-1 < \alpha_1 < \widetilde{\alpha}_1 < \alpha_2 < \widetilde{\alpha}_2 < \cdots < \widetilde{\alpha}_{k-1} < \alpha_k < \widetilde{\alpha}_{k+1} < \alpha_{k+1} < 1,$$

ce qui montre notamment que les racines $-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ et 1 sont distinctes.
Par le théorème de factorisation, on peut donc trouver $\Lambda \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$Q_n^{(k+1)} = (X+1)^{n-(k+1)}(X-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\,\Lambda = (X^2-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\Lambda.$$

On a

$$\deg\left[(X^2-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell)\right] = 2\big(n-(k+1)\big)+k+1 = 2n-(k+1) = \deg Q_n^{(k+1)}$$

donc on en déduit $\deg \Lambda = 0$: on peut donc trouver $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\Lambda = \lambda$. Ainsi,

$$Q_n^{(k+1)} = \lambda(X^2-1)^{n-(k+1)} \prod_{\ell=1}^{k+1}(X-\alpha_\ell),$$

ce qui montre H_{k+1}, et clôt la récurrence.

(c)

$$L_n = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i). \tag{$\star$}$$

L'expression montre que λ est nécessairement le coefficient dominant de L_n, donc $\lambda = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$.
Il reste simplement à montrer la propriété de symétrie des racines, qui est un reflet de la parité, ou l'imparité suivant les cas, de la fonction $x \mapsto L_n(x)$.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$L_n(-\alpha_k) = (-1)^n\, L_n(\alpha_k) = 0,$$

donc les nombres $-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \cdots < -\alpha_1$ sont des racines de L_n. Comme il y en a n, on peut même affirmer qu'il s'agit de toutes les racines de L_n. Mais l'expression ($\star$) montre que les racines de L_n sont $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$.
On en déduit donc $\alpha_1 = -\alpha_n$, $\alpha_2 = -\alpha_{n-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $\alpha_n = -\alpha_1$, ce qui équivaut à l'assertion de l'énoncé.

(d) • Si n est impair, l'imparité de $x \mapsto L_n(x)$ montre $L_n(0) = 0$, c'est-à-dire que 0 est racine de L_n.

• Par ailleurs, la propriété de symétrie vue à la question précédente montre que L_n a autant de racines < 0 que de racines > 0. Il possède en particulier un nombre pair de racines non nulles. Si 0 est racine de P, le nombre total de racines doit donc être impair. Mais ce nombre est précisément n.

Ainsi, on a montré par double implication que 0 était racine de L_n si et seulement si n était impair.

Spectre d'un opérateur différentiel

Dans cette partie, on considère l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & ((X^2-1)P')' = (X^2-1)P'' + 2X\,P'. \end{array} \right.$$

6. • Si $n = 0$, on a, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P' = 0$ et donc $\phi(P) = 0$. *A fortiori*, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

   • Supposons désormais $n \geq 1$. On a alors $\deg P' \leq \deg P - 1 \leq n - 1$, donc $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On en déduit $(X^2-1)P' \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ puis $\phi(P) = \big((X^2-1)P'\big)' \in \mathbb{R}_n[X]$.

7. On va montrer $\Big\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\Big|\, \phi(P) = 0 \Big\} = \mathbb{R}_0[X]$.

   • L'inclusion réciproque a été montrée à la question précédente.

   • Soit $P \in \Big\{ P \in \mathbb{R}[X] \,\Big|\, \phi(P) = 0 \Big\}$. On va montrer que P est constant.
   Comme $0 = \phi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$, on a $(X^2-1)P'$ constant. Autrement dit,
   $$2 + \deg P' = \deg\big((X^2-1)P'\big) \leq 0.$$
   Cela entraîne que $\deg P' \leq -2$, c'est-à-dire que $\deg P' = -\infty$, ou encore $P' = 0$.
   Ainsi, le polynôme P est constant, ce qui conclut.

8. On veut montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que, pour tout entier naturel n, $\phi(L_n) = \lambda_n\,L_n$.

   (a) Un calcul direct montre que $\phi(L_0) = 0$, $\phi(L_1) = 2L_1$ et $\phi(L_2) = 6L_2$, ce qui montre la propriété demandée, avec $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 6$.

   (b) On suppose maintenant $n \geq 2$.

      i. C'est un calcul immédiat à partir de $Q_n' = (X^2-1)'\,(X^2-1)^{n-1} = 2X\,(X^2-1)^{n-1}$.

      ii. On dérive $n+1$ fois, en appliquant la formule de Leibniz : comme $(X^2+1)^{(r)} = 0$ dès que $r > 2$ et que $X^{(r)} = 0$ dès que $r > 1$, les sommes se simplifient et l'on a :
      $$\binom{n+1}{0}(X^2-1)\,Q_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1} 2X\,Q_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} 2\,Q_n^{(n)} = 2n\binom{n+1}{0} X\,Q_n^{(n+1)} + 2n\binom{n+1}{1} Q_n^{(n)}$$
      donc $$(X^2-1)\,L_n'' + 2(n+1)\,X\,L_n' + n(n+1)\,L_n = 2n\,X\,L_n' + 2n(n+1)L_n$$
      donc $$(X^2-1)\,L_n'' + 2X L_n' = n(n+1)L_n,$$
      c'est-à-dire $\phi(L_n) = n(n+1)L_n$.
      Cela montre donc la propriété cherchée, en posant $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(n(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui est compatible avec les cas $n \leq 2$ déjà calculés.

9. On souhaite finalement trouver tous les couples $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X]$ tels que $\phi(P) = \lambda P$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B(n)$ l'assertion
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists!(\mu_0, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : P = \sum_{k=0}^{n} \mu_k\,L_k.$$

Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, B(n)$ par récurrence.
Initialisation. Montrons $B(0)$. Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$.
Analyse. Soit $\mu_0 \in \mathbb{R}$ tel que $P = \mu_0\, L_0 = \mu_0$.
On a donc $\mu_0 = P(0)$. *Synthèse.* Posons $\mu_0 = P(0)$.
Les polynômes $\mu_0 L_0 = \mu_0$ et P sont donc deux polynômes constants possédant la même valeur en 0.
On a donc $P = \mu_0 L_0$, ce qui conclut.
In fine, il y a un unique tel réel μ_0, à savoir $\mu_0 = P(0)$.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $B(n)$. Montrons $B(n+1)$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.
Existence. Posons $\mu_{n+1} = \dfrac{2^n}{\binom{2n}{n}} \operatorname{coeff}_{n+1}(P)$.
Les polynômes $\mu_{n+1} L_{n+1}$ et P sont alors deux éléments de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ possédant le même coefficient de degré $n+1$.
On en déduit que $P - \mu_{n+1} L_{n+1}$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après $B(n)$, on peut donc trouver $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P - \mu_{n+1} L_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k$.
On a donc $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \mu_k\, L_k$.
Unicité. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}), (\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k\, L_k = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k\, L_k$.
En examinant le coefficient de degré $n+1$, on a

$$\operatorname{coeff}_{n+1}(P) = \lambda_{n+1} \operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}) = \mu_{n+1} \operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}).$$

Comme $\operatorname{coeff}_{n+1}(L_{n+1}) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n} \neq 0$, on en déduit $\lambda_{n+1} = \mu_{n+1}$.
En soustrayant $\lambda_{n+1} L_{n+1} = \mu_{n+1} L_{n+1}$ de part et d'autre de l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k\, L_k = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k\, L_k$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, L_k = \sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k,$$

ce qui donne deux décompositions du même élément de $\mathbb{R}_n[X]$.
D'après $B(n)$, on en déduit $\forall k \in [\![0, n]\!], \lambda_k = \mu_k$.
Ainsi, on a montré $\forall k [\![0, n+1]\!], \lambda_k = \mu_k$, ce qui achève la démonstration.
On a ainsi montré

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n+1}[X], \exists! (\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2} : P = \sum_{k=0}^{n+1} \mu_k\, L_k,$$

ce qui montre $H(n+1)$, et clôt la récurrence.

(b) *Analyse.* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\phi(P) = \lambda P$.
On peut donc trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ce qui permet de trouver des scalaires $\mu_0, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k$.

On a alors (essentiellement par linéarité de la somme et de la dérivation) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda\mu_k\, L_k = \lambda P = \phi(P) &= \phi\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k\right) \\
&= (X^2-1)\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k\right)'' + 2X\left(\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k\right)' \\
&= (X^2-1)\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k'' + 2X\sum_{k=0}^{n} \mu_k\, L_k' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k\left[(X^2-1)\, L_k'' + 2X\, L_k'\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k\, \phi(L_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mu_k\, k(k+1)\, L_k.
\end{aligned}$$

Par unicité de ce type de décompositions (démontrée à la question précédente), on en déduit

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \lambda\mu_k = k(k+1)\mu_k.$$

Ensuite, de deux choses l'une :

- Soit $\forall k \in [\![0,n]\!], \mu_k = 0$, auquel cas on a $P = 0$.

- Soit il existe (au moins) un entier $j \in [\![0,n]\!]$ tel que $\mu_j \neq 0$.
  Dans ce cas, l'égalité $\lambda\mu_j = j(j+1)\mu_j$ montre que $\lambda = j(j+1)$.
  Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ différent de j, on a alors $\mu_k = 0$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait en effet recommencer l'argument précédent et obtenir $\lambda = k(k+1)$, ce qui n'est pas compatible avec $\lambda = j(j+1)$ (car la suite $\big(\ell(\ell+1)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc elle ne reprend pas deux fois la même valeur).
  Ainsi, on a montré $\lambda = j(j+1)$ et $P = \mu_j\, L_j$, pour un certain entier $j \in \mathbb{N}$.

Synthèse.

- Clairement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le couple $(\lambda, 0)$ convient.

- Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$, le couple $\big(j(j+1), \mu L_j\big)$ convient, parce que

$$\phi(\mu L_j) = \mu\phi(L_j) = \mu\, j(j+1)L_j.$$

In fine, l'ensemble des couples cherchés est

$$\Big\{(\lambda,0)\,\Big|\,\lambda\in\mathbb{R}\Big\} \cup \bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} \Big\{\big(j(j+1),\mu L_j\big)\,\Big|\,\mu\in\mathbb{R}\Big\}.$$