Devoir maison n+6

Problème. Soient E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie.

1. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$.
   (a) Montrer : $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$. Donner un cas où l'inclusion est stricte.
   (b) Montrer : $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$. Donner un cas où l'inclusion est stricte.
   (c) Montrer : $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g$. Donner un cas où l'inégalité est stricte.
   (d) Montrer :
   $$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \left(\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(f+g) \text{ et } \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \{0_F\}\right).$$
   (e) Montrer enfin :
   $$\mathrm{rg}(f+g) = \mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g \iff \left(\ker f \cap \ker g = \ker(f+g) \text{ et } \ker f + \ker g = E\right).$$
2. (a) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. En considérant la restriction v_1 de v à $\mathrm{Im}\, u$, montrer :
   $$\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u - \dim(\ker v \cap \mathrm{Im}\, u).$$
   (b) On suppose $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$. Justifier :
   $$\mathrm{Im}\, f^{n+2} \subset \mathrm{Im}\, f^{n+1} \subset \mathrm{Im}\, f^n.$$
   (c) Avec les notations précédentes, prouver :
   $$\mathrm{rg}\, f^n - \mathrm{rg}\, f^{n+1} \geq \mathrm{rg}\, f^{n+1} - \mathrm{rg}\, f^{n+2}.$$
   (d) Que peut-on en déduire lorsque $\mathrm{rg}\, f^{n_0+1} = \mathrm{rg}\, f^{n_0}$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$?

UN PEU D'ARITHMÉTIQUE (pour la culture générale)

1. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux entiers 57 et 98. En déduire leur pgcd.
2. Remonter l'algorithme pour détermine un couple d'entiers relatifs $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $57u + 98v = 1$ (*relation de Bézout* entre 57 et 98).
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation $57x + 98y = 5$ (*équation diophantienne*), d'inconnue le couple d'entiers relatifs $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.