Devoir maison n+6 - Correction

Problème. 1. (a) Soit $y \in \operatorname{Im}(f+g)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. y s'écrit donc comme somme d'un élément de $\operatorname{Im} f$ et d'un élément de $\operatorname{Im} g$, donc est dans $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Si on prend $f = \mathrm{Id}_E$ et $g = -\mathrm{Id}_E$, alors $\operatorname{Im}(f+g) = \{0\}$ et $\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = E + E = E$, ce qui nous donne une inclusion stricte... pour peu que E ne soit pas réduit au vecteur nul !

(b) Soit $x \in \ker(f) \cap \ker(g)$. On a alors $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$, donc $x \in \ker(f+g)$., et ainsi : $\ker(f) \cap \ker(g) \subset \ker(f+g)$. On peut reprendre l'exemple de la question précédente pour avoir une inclusion stricte.

(c) D'après la question 1a, $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, donc en passant au dimensions :

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$$

d'après Grassmann ; et c'est gagné.
En reprenant à nouveau l'exemple vu déjà deux fois, l'inégalité est stricte.

(d) Reprenons la chaîne d'inégalités de la question précédente :

$$\operatorname{rg}(f+g) \leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g. \qquad (C)$$

- Si $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$, alors les deux inégalités présentes dans (C) sont des égalités, donc $\dim(\operatorname{Im}(f+g)) = \dim \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, et comme on a toujours l'inclusion $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, cela impose $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. Par ailleurs, l'égalité $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$ impose : $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.

- Réciproquement, si $\operatorname{Im}(f+g) = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$, les deux inégalités présentes dans (C) deviennent des égalités, et on a bien :$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g$.

(e) Notons tout d'abord que grâce au théorème du rang :

$$\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \quad \Longleftrightarrow \quad \dim(\ker f) + \dim(\ker g) = n + \dim(\ker(f+g)).$$

- Supposons tout d'abord : $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$. On a alors $\dim(\ker f) + \dim(\ker g) = n + \dim(\ker(f+g))$, mais $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$, donc $n + \dim(\ker f \cap \ker g) \leq \dim(\ker f) + \dim(\ker g)$. Mais $\dim(\ker f \cap \ker g) = \dim(\ker f) + \dim(\ker g) - \dim(\ker f + \ker g)$, donc : $n \leq \dim(\ker f + \ker g)$, donc $\ker f + \ker g = E$.
  Enfin, si l'inclusion $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$ était stricte, on aurait

$$\dim(\ker f) + \dim(\ker g) < n + \dim(\ker f \cap \ker g) \leq n + \dim(\ker(f+g)),$$

  donc $\dim(\ker f) + \dim(\ker g) \neq n + \dim(\ker(f+g))$, donc $\operatorname{rg}(f+g) \neq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$, ce qui est absurde.

- La réciproque est du même tonneau : si $\ker f \cap \ker g = \ker(f+g)$ et $\ker f + \ker g = E$, alors

$$\dim(\ker f) + \dim(\ker g) = \dim(\ker f + \ker g) - \dim(\ker f \cap \ker g) = n - \dim\left(\ker(f+g)\right),$$

  donc $\operatorname{rg}(f+g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

2. (a) Intéressons-nous à $v_1 = v|_{\operatorname{Im} u}$: l'espace de départ est $\operatorname{Im} u$, donc a pour dimension $\operatorname{rg} u$. L'image est $v_1\left(\operatorname{Im} u\right) = v_1\left(u(E)\right) = v\left(u(E)\right) = \operatorname{Im}(v \circ u)$, donc a pour dimension $\operatorname{rg}(v \circ u)$. Enfin, le noyau de v_1 est l'ensemble des $y \in \operatorname{Im} u$ tels que $v_1(y) = 0$, c'est-à-dire $v(x) = 0$: c'est $\operatorname{Im} u \cap \ker v$. Le théorème du rang appliqué à v_1 donne alors :

$$\operatorname{rg}(v_1) = \dim(\operatorname{Im} u) - \dim\left(\ker v \circ u\right),$$

   soit encore d'après ce qui précède :

$$\operatorname{rg} v \circ u = \operatorname{rg} u - \dim\left(\operatorname{Im} u \cap \ker v\right).$$

   (b) Les deux inclusions découlent du fait que $\operatorname{Im} g \circ f \subset \operatorname{Im} g$, avec $g = f^n$ ou $g = f^{n+1}$.

   (c) Appliquons la question 2a en prenant $v = f$ et $u = f^n$. On obtient :

$$\operatorname{rg}(f^n) - \operatorname{rg}(f^{n+1}) = \dim\left(\ker f \cap \operatorname{Im} f^n\right),$$

   et donc pour la même raison :

$$\operatorname{rg}(f^{n+1}) - \operatorname{rg}(f^{n+2}) = \dim\left(\ker f \cap \operatorname{Im} f^{n+1}\right).$$

   Mais $\operatorname{Im} f^{n+1} \subset \operatorname{Im} f^n$, donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f^{n+1} \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f^n$, ce qui, en prenant les dimensions, fournit :

$$\operatorname{rg}(f^{n+1}) - \operatorname{rg}(f^{n+2}) \leq \operatorname{rg}(f^n) - \operatorname{rg}(f^{n+1}).$$

   (d) Si $\operatorname{rg} f^{n_0+1} = \operatorname{rg} f^{n_0}$, alors

$$0 \leq \operatorname{rg}(f^{n_0+1}) - \operatorname{rg}(f^{n_0+2}) \leq \operatorname{rg}(f^{n_0}) - \operatorname{rg}(f^{n_0+1}) = 0,$$

   donc $\operatorname{rg} f^{n_0+2} = \operatorname{rg} f^{n_0+1}$, puis par récurrence immédiate :

$$\forall n \geq n_0, \qquad \operatorname{rg}(f^n) = \operatorname{rg}(f^{n_0}).$$

UN PEU D'ARITHMÉTIQUE

1. on applique l'algorithme d'Euclide à 98 et 57. Il y a beaucoup d'étapes !

$$98 = 1 \times 57 + 41 \tag{0.1}$$
$$57 = 1 \times 41 + 16 \tag{0.2}$$
$$41 = 2 \times 16 + 9 \tag{0.3}$$
$$16 = 1 \times 9 + 7 \tag{0.4}$$
$$9 = 1 \times 7 + 2 \tag{0.5}$$
$$7 = 3 \times 2 + \boxed{1} \tag{0.6}$$
$$3 = 3 \times 1 + 0. \tag{0.7}$$

   Le pgcd de 98 et 57 est donc 1, ces nombres sont premiers entre eux.

2. On remonte l'algorithme depuis le 1 encadré pour obtenir une combinaison linéaire de 98 et de 57 à coefficients entiers :

$$1 \underset{(0.6)}{=} 7 - 3 \times 2 \underset{(0.5)}{=} 7 - 3(9-7) = 4 \times 7 - 3 \times 9 \underset{(0.4)}{=} 4(16-9) - 3 \times 9 = 4 \times 16 - 7 \times 9 = \cdots$$

   On respire un coup et on y retourne :

$$\cdots \underset{(0.3)}{=} 4\times16-7(41-2\times16) = 18\times16-7\times41 \underset{(0.2)}{=} 18(57-41)-7\times41 = 18\times57-25\times41 \underset{(0.1)}{=} 18\times57-25(98-57)$$

   Ce qui nous donne pour finir

$$\boxed{1 = 43 \times 57 - 25 \times 98.}$$

3. En multipliant par 5 la relation précédente, on obtient une première solution de l'équation diophantienne : $(x_0, y_0) = (215, -125)$.
   Analyse. Si (x, y) est une autre solution, alors

$$57(x - x_0) + 98(y - y_0) = 0.$$

   Donc 98 divise $57(x - x_0)$.
   Comme 98 et 57 sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, 98 divise $x - x_0$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 98k$.
   Alors $98(y - y_0) = -57(x - x_0) = -57 \times 98k$, donc $y - y_0 = -57k$.
   On a donc $\begin{cases} x = x_0 + 98k = 215 + 98k \\ y = y_0 - 57k = -125 - 57k \end{cases}$.
   Synthèse. On vérifie que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(215 + 98k, -125 - 57k)$ est solution de l'équation.
   Conclusion.

$$\boxed{\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 57x + 98y = 5\} = \{(215 + 98k, -125 - 57k), k \in \mathbb{Z}\}.}$$