Devoir maison n+7

Le but de ce problème est de déterminer la somme de la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$.

1. (a) Montrer à l'aide des formules d'Euler que, pour $a,b\in\mathbb{R}$, on a
$$\cos(a)\sin(b)=\frac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big).$$
   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\,]0,\pi]$. Montrer que $\dfrac{1-\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{it}}\,\mathrm{e}^{it}=\dfrac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{e}^{\frac{i(n+1)t}{2}}$ (*factorisation par l'arc moitié*).

   (c) En déduire que :
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)=\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.$$

2. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide de deux intégrations par parties, que $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt=\frac{1}{k^2}$.

3. Soit $u:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

   (a) Justifier qu'il existe une constante $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall t\in[0,\pi]$, $|u'(t)|\leqslant M$.

   (b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties et de l'inégalité triangulaire pour les intégrales, que
$$\int_0^{\pi}u(t)\sin(\lambda t)\,dt\underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

4. Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t)=\left(\dfrac{t^2}{2\pi}-t\right)\dfrac{1}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ si $t\in\,]0,\pi]$ et $f(0)=-1$.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

   (b) Montrer, à l'aide d'un calcul de développement limité, que pour $t\to0^+$ on a $\dfrac{t}{2\sin(\frac{t}{2})}=1+o(t)$.

   (c) Montrer que f est continue et dérivable en 0, et donner l'équation de sa tangente en 0.

   (d) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to0^+}f'(t)=\frac{1}{2\pi}$. En déduire que $f\in\mathcal{C}^1([0,\pi])$.

5. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer, à l'aide des questions 1 et 2, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}f(t)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,dt.$

   (b) En déduire que la série est convergente, et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Bonnes vacances !