Devoir maison n+7 - Correction

1. (a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a)\sin(b) = \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} = \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}-e^{-i(a+b)}}{4i} = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big).$$

(b) En utilisant la *factorisation par l'arc moitié* et la formule d'Euler pour le sinus, on obtient:

$$\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\,e^{it} = \frac{e^{i\frac{nt}{2}}\left(e^{-i\frac{nt}{2}}-e^{i\frac{nt}{2}}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}\right)}\,e^{it} = \frac{e^{i\frac{nt}{2}}\,e^{it}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{-2i\sin(\frac{nt}{2})}{-2i\sin(\frac{t}{2})}\boxed{=\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,e^{i\frac{(n+1)t}{2}}}.$$

(c) On utilise le fait que $\cos(kt) = \Re(e^{ikt})$ et la linéarité de la partie réelle:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \sum_{k=1}^{n}\Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{it})^k\right) = \Re\left(\frac{1-e^{int}}{1-e^{it}}\,e^{it}\right).$$

On a utilisé la formule de la somme pour une suite géométrique de raison $e^{it} \neq 1$, car $t \in]0,\pi]$. En appliquant le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \Re\left(\frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\,e^{i\frac{(n+1)t}{2}}\right) &= \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\\ &= \frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})}\left(\sin\left(\frac{n+1}{2}t+\frac{n}{2}t\right)-\sin\left(\frac{n+1}{2}t-\frac{n}{2}t\right)\right)\\ &\boxed{=\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}.}\end{aligned}$$

2. On calcule l'intégrale demandée à l'aide de deux intégrations par parties (IPP). L'idée est de dériver deux fois le polynôme $t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ (ce qui donnera une constante) et d'intégrer deux fois $t \mapsto \cos(kt)$.

On note donc $u : t \mapsto \dfrac{t^2}{2\pi} - t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{k}\sin(kt)$ (possible car $k \in \mathbb{N}^*$) qui sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ avec $v'(t) = \cos(kt)$. En appliquant la formule d'IPP, on obtient

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k}\sin(kt)\,dt.$$

Le terme entre crochets est nul et l'intégrale restante se calcule à l'aide d'une IPP:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\,dt = \left[\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\frac{1}{k^2}\cos(kt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2}\cos(kt)\,dt = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^3}\big[\sin(kt)\big]_0^\pi = \boxed{\frac{1}{k^2}.}$$

3. (a) Comme u est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, la fonction u' est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,\pi]$. Comme tout fonction continue sur un segment est bornée, on en déduit qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [0,\pi]$, $|u'(t)| \leqslant M$.

(b) Par intégration par parties,

$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = -\Big[u(t)\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\Big]_0^\pi + \int_0^\pi u'(t)\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t)\mathrm{d}t$$

On majore ensuite la valeur absolue de cette intégrale :

$$\left|\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{u(0)-u(\pi)\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\pi u'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|u(0)|+|u(\pi)|}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|}\int_0^\pi |u'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$, et comme une valeur absolue est toujours positive, on peut conclure par encadrement que

$$\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. (a) Sur $]0,\pi]$, f est le produit d'une fonction polynomiale, et de l'inverse d'une fonction usuelle qui ne s'annule pas sur cet intervalle, donc par opérations usuelles sur les fonctions $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

(b) Le développement limité usuel du sinus avec une changement de variable donne :

$$\sin\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{t}{2} - \frac{1}{6}\Big(\frac{t}{2}\Big)^3 + o(t^3)$$

et donc

$$\frac{t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{t}{t-\frac{1}{24}t^3+o(t^3)} = \frac{1}{1-\frac{1}{24}t^2+o(t^2)} = 1+\frac{1}{24}t^2+o(t^2) = 1+o(t)$$

Remarque. On a obtenu un développement limité à l'ordre 2, ce qui est plus précis que le DL à l'ordre 1 demandé. On aurait pu faire les calculs en partant du DL de sinus à l'ordre 2.

(c) On calcule le développement limité de $f(t)$ pour $t \to 0^+$:

$$f(t) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\frac{1}{2\sin(\frac{t}{2})} = \left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\frac{t}{2\sin(\frac{t}{2})} = \left(\frac{t}{2\pi}-1\right)\big(1+o(t)\big) = -1+\frac{t}{2\pi}+o(t).$$

Comme f admet un DL à l'ordre 1 en 0, f est continue et dérivable en 0, avec $f(0) = -1$ et $f'(0) = \dfrac{1}{2\pi}$. L'équation de sa tangente en 0 est $y = -1 + \dfrac{x}{2\pi}$.

(d) Comme f est dérivable sur $]0,\pi]$, on peut calculer sa dérivée pour $t > 0$:

$$f'(t) = \frac{\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Comme le dénominateur est équivalent à t^2 en 0, il suffit d'écrire un DL à l'ordre 2 du numérateur :

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) &= \left(\frac{t}{\pi}-1\right)2\left(\frac{t}{2}+o(t^2)\right) - \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)(1+o(t))\\ &= \frac{t^2}{\pi} - t - \frac{t^2}{2\pi} + t + o(t^2) = \frac{t^2}{2\pi}+o(t^2).\end{aligned}$$

Donc le numérateur est équivalent à $\dfrac{t^2}{2\pi}$ en 0 et $\lim\limits_{t\to0^+} f'(t) = \dfrac{1}{2\pi} = f'(0)$, ce qui montre que f' est continue en 0. On a de plus justifié en (a) que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

5. (a) On applique successivement le résultat de la question 3, puis la linéarité de l'intégrale et le résultat de la question 2, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(kt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \left(\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t \\
&\boxed{= \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t.}
\end{aligned}$$

(b) D'après la question 3.(b), avec $\lambda = n + \frac{1}{2}$, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \mathrm{d}t = 0$. La série considérée est donc convergente, de somme :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \boxed{= \frac{\pi^2}{6}.}$$