Devoir maison n+8

Rédiger *au choix* l'un des deux exercices suivants.

Exercice 1. Une urne contient n boules, numérotées de 1 à n. On procède à des tirages successifs d'une boule. À chaque tirage, on remet la boule et on enlève les boules dont le numéro est strictement supérieur au numéro de la boule tirée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note X_k le numéro de la boule tirée au k-ième tirage.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X_1.
2. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) et en déduire la loi de X_2.
3. Calculer l'espérance de X_2.
4. Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
   On donnera le résultat sous forme factorisée.
5. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, et k un entier, déterminer $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)$.
   Les variables X_k et X_{k+1} sont-elles indépendantes ?
6. Montrer que $(\mathbb{E}(X_k))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite arithmético-géométrique.
   En déduire une expression de son terme général et sa limite quand $k \to \infty$.
7. Montrer que $\mathbb{P}(X_k = 1) \underset{k\to\infty}{\to} 1$.
   Indication. On pourra appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire positive $X_k - 1$.

Exercice 2 (Fonctions génératrices)**.** Si Z est une variable aléatoire à valeurs entières sur un univers fini, on on appelle *fonction génératrice* de Z le polynôme

$$g_Z = \mathbb{E}(X^Z) = \sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k)\, X^k \in \mathbb{R}[X].$$

⚠ X désigne l'indéterminé et pas une variable aléatoire, pour cet exercice.

1. Vérifier que g_Z est un polynôme à coefficients dans $[0, 1]$.
   Déterminer $g_Z(0)$ et $g_Z(1)$, et reconnaître $g'_Z(1)$.

2. Montrer que la loi de Z est entièrement déterminée par g_Z.

3. Montrer que si Z_1 et Z_2 sont des v.a. indépendantes, alors $g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2}$.

4. Soit $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$. Déterminer g_Z.

5. Retrouver grâce aux questions précédentes la loi de la somme $Z_1 + Z_2$, quand Z_1 et Z_2 sont des variables aléatoires indépendantes binomiales, telles que $Z_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Z_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, pour $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$.

6. On lance deux dés à six faces éventuellement pipés, mais de manière indépendante. On note Z_1 et Z_2, respectivement, le résultat de ces deux lancers, et $T = Z_1 + Z_2$ le total des points obtenus.

   (a) Montrer que T ne suit pas la loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.
   Indication. Par l'absurde, si c'est le cas, factoriser g_T dans $\mathbb{C}[X]$ et raisonner sur les racines de g_{Z_1} et g_{Z_2}.

   (b) On suppose que T suit la même loi que dans le cas où les dés sont équilibrés.

      i. Déterminer la fonction génératrice de T. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.

      ii. Montrer que les dés sont effectivement équilibrés.
      Indication. On pourra montrer que $X(X+1)(X^2 - X + 1)^2$ n'est pas un polynôme à coefficients tous positifs.