Devoir maison n+8 - Correction

Exercice 1. 1. La variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, et est donc d'espérance $\boxed{\frac{n+1}{2}}$.

2. Pour (X_1, X_2) a pour ensemble image $\llbracket 1,n\rrbracket^2$. Pour $(i,j) \in \llbracket 1,n\rrbracket^2$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} \frac{1}{in} \text{ si } j \leq i, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}}$$

En conséquence, la loi de X_2 est donnée par la loi marginale de cette loi conjointe : si $j \in \llbracket 1,n\rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i}}.$$

3. On calcule en inversant les sommes (ne pas hésiter à se représenter dans $\mathbb{N}^2$ l'ensemble des indices de sommation) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{j=1}^{n} j \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} = \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \boxed{\frac{n+3}{4}}.\end{aligned}$$

4. On calcule d'abord l'espérance du produit X_1X_2 à l'aide du théorème du transfert :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij \cdot \frac{1}{in} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i\right) \\ &= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{6}}.\end{aligned}$$

La covariance s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1, X_2) &= \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n+1}{2}\cdot\frac{n+3}{4} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+2}{3} - \frac{n+3}{4}\right) = \boxed{\frac{(n+1)(n-1)}{24}}.\end{aligned}$$

5. Pour $(i,j) \in \llbracket 1,n\rrbracket^2$, et k un entier, $\mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i) = \dfrac{1}{i}$ si $j \leq i$ (car si $X_k = i$, il reste les i premières boules dans l'urne pour le k-ième tirage), et 0 si $j > i$. Les variables X_k et X_{k+1} ne sont donc pas indépendantes, sinon cette quantité ne dépendrait pas de i.

6. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Déterminons $\mathbb{E}(X_{k+1})$ à l'aide de la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'évènements $(X_k = i)_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X_{k+1} = j) && \text{définition}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_{k+1} = j | X_k = i)\mathbb{P}(X_k = i) && \text{formule des probas totales}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} j\right) \frac{1}{i}\mathbb{P}(X_k = i) && \begin{array}{c}\text{question précédente}\\ \text{et échange des sommes}\end{array}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\frac{i(i+1)}{2}\mathbb{P}(X_k = i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(X_k = i) + \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_k = i)}_{=1} = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_k) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

On vient de prouver que $(\mathbb{E}(X_k))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite arithmético-géométrique. On détermine le point fixe de la relation : $\ell = \frac{1}{2}\ell + \frac{1}{2}$ si et seulement si $\ell = 1$. Puis, on montre que $(\mathbb{E}(X_k) - 1)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$\mathbb{E}(X_k) = \frac{\mathbb{E}(X_1) - 1}{2^{k-1}} + 1 = \boxed{\frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{n+1}{2} + 1}$$

en utilisant la question 1, et donc $\boxed{\mathbb{E}(X_k) \underset{k\to\infty}{\to} 1.}$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Comme X_k est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, l'évènement $\{X_k = 1\}$ est le contraire de $\{X_k \geq 2\} = \{X_k - 1 \geq 1\}$. Comme $X_k - 1$ est une variable aléatoire positive, on peut utiliser l'inégalité de Markov avec $a = 1$:
$$\mathbb{P}(X_k - 1 \geq 1) \leq \frac{\mathbb{E}(X_k - 1)}{1} = \mathbb{E}(X_k) - 1 = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{n+1}{2} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$
En conséquence, $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k - 1 \geq 1) \boxed{\underset{k\to\infty}{\to} 1.}$

Exercice 2 (Fonctions génératrices)**.** Si Z est une variable aléatoire à valeurs entières sur un univers fini, on définit le polynôme
$$g_Z = \mathbb{E}(X^Z) = \sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k)\, X^k \in \mathbb{R}[X],$$
et on l'appelle *fonction génératrice de Z*.

1. Comme Ω est fini, $Z(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et la somme porte donc sur un nombre fini d'indices. La somme définit donc bien un polynôme à coefficients compris dans $[0, 1]$ puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité. De plus $\boxed{g_Z(0) = \mathbb{P}(Z = 0)}$ et $g_Z(1) = \sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = \boxed{1}$ car $\{Z = k\}_{k\in Z(\Omega)}$ est un système complet d'évènements.
Pour évaluer $g_Z'(1)$, on dérive :
$$g_Z' = \sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)kX^k$$
puis on évalue en 1 :
$$g_Z'(1) = \sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(X = k)k = \boxed{\mathbb{E}(Z).}$$

2. La loi de Z est entièrement déterminée par les $P(Z=k)$ pour k qui parcourt $Z(\Omega)$, donc par le polynôme défini avec ces coefficients (on a même $\mathbb{P}(Z=k) = \dfrac{g_Z^{(k)}(0)}{k!}$ en identifiant le polynôme et son développement de Taylor en 0).

3. Soient Z_1 et Z_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs entières. Alors, en appliquant une formule de transfert généralisée à (Z_1, Z_2) avec $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (k_1, k_2) & \longmapsto & X^{k_1+k_2} \end{array} \right.$:

$$\begin{aligned} g_{Z_1+Z_2} &= \mathbb{E}(f(Z_1, Z_2)) = \sum_{k_1 \in Z_1(\Omega)} \sum_{k_2 \in Z_2(\Omega)} \mathbb{P}(Z_1 = k_1, Z_2 = k_2) X^{k_1+k_2} \\ &= \sum_{k_1 \in Z_1(\Omega)} \sum_{k_2 \in Z_2(\Omega)} \mathbb{P}(Z_1 = k_1)\mathbb{P}(Z_2 = k_2) X^{k_1+k_2} \qquad \text{indépendance de } Z_1 \text{ et } Z_2 \\ &= \sum_{k_1 \in Z_1(\Omega)} \mathbb{P}(Z_1 = k_1) X^{k_1} \sum_{k_2 \in Z_2(\Omega)} \mathbb{P}(Z_2 = k_2) X^{k_2} = \boxed{g_{Z_1} g_{Z_2}.} \end{aligned}$$

4. Soit $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $p \in]0, 1[$. Alors :

$$g_Z = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \mathbb{P}(Z = k)\, X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^k X^k = \boxed{(1 + pX)^n.}$$

5. Si Z_1 et Z_2 sont des v.a. indépendantes binomiales, avec $Z_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Z_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors

$$g_{Z_1+Z_2} = g_{Z_1} g_{Z_2} = (1 + pX)^{n_1} (1 + pX)^{n_2} = (1 + pX)^{n_1+n_2}$$

qui est la fonction génératrice correspondant à la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1+n_2, p)$ d'après la question précédente. Donc d'après la question 2, $Z_1 + Z_2$ suit forcément la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. On retrouve le résultat démontré en TD.

6. On lance deux dés à six faces éventuellement pipés. On note Z_1 et Z_2, respectivement, le résultat de ces deux lancers, et $T = Z_1 + Z_2$ le total des points obtenus.

   (a) On suppose par l'absurde que T suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![2, 12]\!])$, et sa fonction génératrice est donc égale à

$$g_T = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(T = k) X^k = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11} X^k = \frac{X^2}{11} \sum_{k=0}^{10} X^k = \frac{X^2}{11} \prod_{j=1}^{10} (X - u^j)$$

   avec $u = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{11}}$ la racine 11-ième élémentaire de l'unité. Comme 11 est impair, tous les u^j apparaissant ici sont complexes non réels.
   Comme Z_1 et Z_2 sont indépendantes et $T = Z_1 + Z_2$, $g_T = g_{Z_1} g_{Z_2}$ d'après la question 4. Comme g_{Z_1} et g_{Z_2} sont de degrés inférieurs à 6 (puisque leurs valeurs sont inférieures à 6), et que leur produit est de degré 12, ils sont nécessairement de degré égal à 6.
   Comme 0 n'est pas une valeur prise par Z_1 ou Z_2, 0 est racine à la fois de g_{Z_1} et g_{Z_2}, d'après la question 1. Le terme en X^2 dans la factorisation de g_T est donc équitablement réparti entre g_{Z_1} et g_{Z_2}.
   Ainsi g_{Z_1} (tout comme g_{Z_2}), qui est de degré 6, admet comme racine 0 et 5 racines complexes non réelles, parmi les racines complexes de g_T. Ceci est impossible puisque ces racines sont toutes distinctes, et devraient être regroupées deux par deux pour que g_{Z_1} soit à coefficients réels. On obtient là une contradiction. En conclusion, quelles que soient les lois suivies par les dés, pipés ou non, la loi de la somme ne peut pas être uniforme.

(b) i. Si les dés sont équilibrés, Z_1 et Z_2 sont indépendantes et de loi uniforme sur $[\![1,6]\!]$. Alors d'après la question 3.,

$$g_T = g_{Z_1} g_{Z_2} = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Z_1 = k) X^k \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(Z_2 = k) X^k = \left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} X^k\right)^2 = \frac{X^2}{36}\left(\sum_{k=0}^{5} X^k\right)^2.$$

On factorise à nouveau dans $\mathbb{C}[X]$, en notant cette fois $\omega = \mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}}$ la racine 6-ième élémentaire de l'unité.

$$g_T = \frac{X^2}{36}\left(\prod_{j=1}^{5}(X - \omega^j)\right)^2.$$

Remarquons que $\omega^3 = -1$, et en utilisant $\omega^5 = \bar{\omega}$ et $\omega^4 = \bar{\omega}^2$, on obtient :

$$g_T = \frac{X^2(X+1)^2}{36}(X-\omega)^2(X-\bar{\omega})^2(X-\omega^2)^2(X-\bar{\omega}^2)^2.$$

Pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on associe les racines complexes conjuguées deux à deux : on a d'une part $(X-\omega)(X-\bar{\omega}) = X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X + 1 = X^2 - X + 1$, et d'autre part $(X-\omega^2)(X-\bar{\omega}^2) = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$. Au total, on obtient

$$\boxed{g_T = \frac{1}{36}X^2(X+1)^2(X^2-X+1)^2(X^2+X+1)^2.}$$

ii. Soit à présent Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,6]\!]$ telles que $g_{Z_1} g_{Z_2} = g_T$. Montrons que Z_1 et Z_2 sont forcément uniformes, c'est-à-dire que leurs fonctions génératrices sont données par $g_Z = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} X^k = \sqrt{g_T} = \frac{1}{6}X(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1)$.
Comme dans la question précédente, 0 est racine de g_{Z_1} et de g_{Z_2} puisque Z_1 et Z_2 ne prennent pas la valeur 0, et g_{Z_1} et g_{Z_2} sont de degré exactement 6 puisque leur plus grande valeur est 6 est leur produit est de degré 12. Les 5 autres racines sont à chercher parmi celles de g_T : comme les racines complexes apparaissent couplées (puisque g_{Z_1} et g_{Z_2} sont à coefficients réels), -1 est forcément racine de g_{Z_1} et de g_{Z_2}.
On a donc $g_{Z_1} = X(X+1)P_1$ et $g_{Z_2} = X(X+1)P_2$ avec P_1 et P_2 des polynômes à coefficients réels de degré 4 qui vérifient $P_1 P_2 = \frac{1}{36}(X^2-X+1)^2(X^2+X+1)^2$. Si on factorise P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}[X]$, cela donne une factorisation de leur produit, donc par unicité de la factorisation les facteurs de P_1 et P_2 ne peuvent être que $X^2 - X + 1$ et $X^2 + X + 1$.
Mais, si $P_1 = \lambda(X^2 - X + 1)^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$g_{Z_1} = \lambda X(1+X)(X^2-X+1)^2 = \cdots = \lambda(X^6 - 2X^5 + X^4 + X^3 - 2X^2 + X).$$

C'est exclu puisqu'une fonction génératrice a tous ses coefficients positifs.
Ainsi on a forcément $P_1 = \lambda_1(X^2-X+1)(X^2+X+1)$ et $P_2 = \lambda_2(X^2-X+1)(X^2+X+1)$, et les valeurs de λ_i doivent être les mêmes puisque $g_{Z_1}(1) = g_{Z_2}(1) = 1$ (question 1.), donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$ et les lois de Z_1 et Z_2 sont donc uniformes puisque :

$$\boxed{g_{Z_1} = g_{Z_2} = \frac{1}{6}X(X+1)(X^2-X+1)(X^2+X+1) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} X^k.}$$