DS n°1

Durée : 3 heures.

Consignes de présentation :

- Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
- La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation. Il vous est demandé :
  - d'$\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats principaux,
  - de <u>souligner</u> les résultats et arguments intermédiaires importants,
  - de soigner votre écriture,
  - de maintenir une marge dans vos copies et d'aérer vos copies,
  - de numéroter vos copies et de les rendre dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.
- Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Ce sujet contient **3 pages**.
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Soit t un réel et $n \geqslant 2$ un entier. Calculer les quantités :

$$A = \sum_{k=n}^{2n} (k+2) \qquad B = \sum_{p=0}^{n+1} \frac{1+3^p}{2^{2p+1}} \qquad C = \sum_{i=2}^{n} \frac{(1-t)^i}{2} \qquad D = \prod_{j=3}^{n+3} \frac{e^t \ln(j-1)}{\ln(j)}$$

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{Z}$ l'implication : $\dfrac{n(n+2)}{4} \notin \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad n$ impair.

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant a_n \leqslant n!$.

4. Soit $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.
   a. Déterminer la forme algébrique de z.
   b. Donner la forme trigonométrique de $(1+i\sqrt{3})$ et $(1+i)$ et en déduire celle de z.
   c. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite réelle définie par $u_1 = 2$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) u_n - n - 1$.

1. Calculer u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > n$.
3. En déduire que (u_n) est strictement croissante.
4. On définit, pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
   a. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique, puis calculer son terme général.
   b. En déduire une expression explicite de u_n en fonction de n.

Exercice 3 (Une inéquation)**.**

1. a. Pour une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, traduire avec des quantificateurs l'assertion "f est croissante sur $\mathbb{R}_+$".
   b. Énoncer l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$.
2. On définit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+x} \end{array} \right.$.
   a. Montrer que $\forall x \in [0,+\infty[$, $0 \leqslant f(x) < 1$. La fonction f est-elle surjective ?
   b. Montrer que la fonction f est strictement croissante. Est-elle injective ?
   c. Déterminer graphiquement $f([1,2])$, $f([2,+\infty[)$, $f^{-1}(]-2,-1])$ et $f^{-1}([0,2])$.
3. En utilisant la fonction f, montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

Exercice 4. On rappelle qu'on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Donner une écriture par sélection et une écriture paramétrée de $\mathbb{U}$.

2. On note $A = \mathbb{U}\backslash\{i\}$ et $B = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : z = \frac{1+\lambda i}{\lambda+i}\right\}$. Montrer $A = B$.

———————————————————————————

Exercice 5 (Somme des inverses)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Le but de cet exercice est de montrer que S_n n'est jamais un entier dès que n est plus grand que 2.
Pour cela, on va montrer que S_n s'écrit toujours comme le rapport d'un entier impair sur un entier pair.
On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire comme le quotient d'un entier impair sur un entier pair.

1. Traduire cette définition de $\mathcal{A}$ avec des notations ensemblistes ($\mathcal{A} = \{\ldots\}$) selon la méthode de votre choix, et vérifier que cet ensemble ne contient aucun entier.

2. Soit $n \geqslant 2$ un entier pair. Montrer que si $S_n \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note I_p la somme des inverses des entiers impairs jusqu'à $(2p+1)$:

$$I_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2k+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2p+1}$$

   Montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $r_p, s_p \in \mathbb{N}$ tels que $I_p = \dfrac{r_p}{2s_p+1}$.

4. Soit $n \geqslant 3$ un entier impair (on pose $n = 2p+1$, avec $p \in \mathbb{N}^*$).

   a. Montrer que l'on a :

$$S_{2p+2} = \frac{1}{2} S_{p+1} + I_p$$

   b. Déduire des questions précédentes que si $S_{p+1} \in \mathcal{A}$, alors $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

5. Déduire de toutes les questions précédentes que pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \notin \mathbb{N}$.

———————————————————————————

Hors barème, à ne traiter qu'en cas de fatal ennui et après avoir très bien traité tout le reste.

Exercice 6 (Une équation ensembliste)**.**
Soit Ω un ensemble, A et B des parties de Ω. Résoudre dans $\mathcal{P}(\Omega)$ l'équation ensembliste

$$(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing.$$