DS n°1

Correction.

Exercice 1. 1. On calcule :

$$A=\sum_{k=n}^{2n}(k+2)=\boxed{\frac{(n+1)(3n+4)}{2}.}$$

$$B=\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1+3^p}{2^{2p+1}}=\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1+3^p}{4^p}=\frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{n+1}\frac{1}{4^p}+\sum_{p=0}^{n+1}\left(\frac{3}{4}\right)^p\right)=\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$=\boxed{\frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+2}\right)+2\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2}\right).}$$

$$C=\sum_{i=2}^{n}\frac{(1-t)^i}{2}=\boxed{\begin{cases}\frac{n-1}{2}\text{ si } t=0,\\ \frac{(1-t)^2}{2t}\left(1-(1-t)^{n-1}\right)\text{ si } t\neq 0.\end{cases}}$$

$$D=\prod_{j=3}^{n+3}\frac{e^t\ln(j-1)}{\ln(j)}=e^{(n+1)t}\prod_{j=3}^{n+3}\frac{\ln(j-1)}{\ln(j)}=\boxed{e^{(n+1)t}\frac{\ln(2)}{\ln(n+3)}.}$$

2. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On procède par contraposée : supposons n pair et montrons que $\frac{n(n+2)}{4}$ est entier : si n est pair, il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $n=2p$. Alors $\frac{n(n+2)}{4}=\frac{2p(2p+2)}{4}=p(p+1)$ est entier puisque c'est un produit d'entiers.
On a montré quel que soit $n\in\mathbb{Z}$ que si n est pair, $\frac{n(n+2)}{4}$ est entier, et la contraposée donne donc l'implication demandée :

$$\boxed{\frac{n(n+2)}{4}\notin\mathbb{Z}\quad\Longrightarrow\quad n\text{ impair.}}$$

3. Soit $(a_n)_{n_{\mathbb{N}}}$ une suite définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier $n\geqslant 2$, $a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons P_n la proposition $n\leqslant a_n\leqslant n!$ et démontrons P_n par récurrence double.
Initialisation. On a $a_0=1=0!$ donc $0\leqslant a_0\leqslant 0!$ et $a_1=1=1!$ donc $1\leqslant a_1\leqslant 1!$.
$\underline{P_0 \text{ et } P_1 \text{ sont donc vérifiées.}}$
Hérédité. Soit n un entier supérieur ou égal à 2, $\underline{\text{supposons que } P_{n-2} \text{ et } P_{n-1} \text{ sont vérifiées}}$ et montrons qu'alors P_n est également vérifiées.
On essaie de minorer a_n en utilisant P_{n-1} et P_{n-2} (en la multipliant par la quantité positive $(n-1)$) :

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\geqslant(n-1)+(n-1)(n-2).$$

On remarque qu'il est utile de distinguer :
• si $n=2$, on obtient directement $a_2=2\geqslant 2$.
• si $n>2$, $n-1$ et $n-2$ sont des entiers strictement positifs et leur produit est donc supérieur ou égal à 1, d'où $a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\geqslant(n-1)+(n-1)(n-2)\geqslant n$.
De même, on majore a_n en utilisant P_{n-1} et P_{n-2} (multipliée par la quantité positive $(n-1)$) :

$$a_n=a_{n-1}+(n-1)a_{n-2}\leqslant(n-1)!+(n-1)(n-2)!=(n-1)!+(n-1)!=2(n-1)!\leqslant n(n-1)!=n!,$$

la dernière inégalité étant vérifiée puisque $2\leqslant n$ et $(n-1)!\geqslant 0$.
On a démontré $n\leqslant a_n\leqslant n!$, c'est-à-dire $\underline{P_n}$.
Conclusion. Par récurrence double, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N},\ n\leqslant a_n\leqslant n!.}$

4. a. Par multiplication en haut et en bas par le conjugué de $(1+i)$, on a :

$$z=\frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{2}=\boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

b. On a $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$, donc :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}} \quad \text{et} \quad 1+i = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

d'où par quotient :

$$z = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$$

c. D'après les deux questions précédentes, on a les deux égalités :

$$z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad \text{et} \qquad z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

Donc par identification des partie réelle et imaginaire :

$$\begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi}{12} \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi}{12} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{cases} \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}) \\ \sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1) \end{cases}}$$

Exercice 2. 1. On a $u_2 = 2(1+\frac{1}{1})u_1 - 2 \boxed{= 6}$ et $u_3 = 2(1+\frac{1}{2})u_2 - 3 \boxed{= 15}$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note P_n la proposition « $u_n > n$ ».
Initialisation. Comme $u_1 = 2 > 1$, $\underline{P_1 \text{ est vraie.}}$
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$ et $\underline{\text{supposons } P_n \text{ vraie.}}$
Alors,

$$u_{n+1} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\underbrace{u_n}_{\substack{>n\\(HR)}} - n - 1 \underset{(\star)}{>} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)n - n - 1 = 2(n+1) - n - 1 = n+1,$$

l'inégalité $(\star)$ étant vérifiée car le facteur $2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ est strictement positif. On a donc montré que $\underline{P_{n+1} \text{ est vraie.}}$
Conclusion. Par récurrence, on a donc montré que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ u_n > n.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \left(2+\frac{2}{n}\right)u_n - n - 1 - u_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)\underbrace{u_n}_{>n} - n - 1 > \left(1+\frac{2}{n}\right)n - n - 1 = 1 > 0.$$

Donc $\underline{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

4. a. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{2(1+\frac{1}{n})u_n - n - 1}{n+1} = \frac{2(n+1)\frac{u_n}{n} - (n+1)}{n+1} = 2\frac{u_n}{n} - 1 = \boxed{2v_n - 1}$$

donc (v_n) est arithmético-géométrique. On procède selon la méthode du cours :

- On commence par résoudre l'équation $\ell = 2\ell - 1$; la seule solution est $\ell = 1$.
- On pose $w_n = v_n - 1$ et on observe que $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2.
- Le terme général est alors donné pour tout $n \geqslant 1$ par la formule

$$w_n = w_1 2^{n-1} = (v_1 - 1)2^{n-1} = \left(\frac{u_1}{1} - 1\right)2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

On revient enfin à (v_n) pour obtenir $\boxed{v_n = 2^{n-1} + 1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

b. Finalement, pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{u_n = nv_n = n(2^{n-1}+1).}$

Exercice 3.

1. a. Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y).}$$

   b. L'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x+y| \leqslant |x| + |y|.}$

2. On définit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1+x} \end{array} \right.$.

   a. Soit $x \in [0,+\infty[$.
   - Comme x et $1+x$ sont positifs, $f(x)$ est également positif.
   - Comme $x < 1+x$, en divisant par $1+x$ qui est strictement positif, on obtient $f(x) < 1$.le quotient est strictement inférieur à 1.
   - On a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\underline{0 \leqslant f(x) < 1}$. En particulier 2 n'a pas d'antécédent par f, donc f n'est <u>pas surjective</u>.

   b. La fonction f est dérivable, on peut donc évaluer le signe de sa dérivée pour étudier sa monotonie. Si $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

   donc f est <u>strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$</u>. Elle est donc <u>injective</u> puisque la stricte monotonie implique l'injectivité.

   c. Un calcul de limite donne que f tend vers 1 en $+\infty$. Graphiquement, on obtient donc que

$$\boxed{f([1,2]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right], \quad f([2,+\infty[) = \left[\frac{2}{3}, 1\right[, \quad f^{-1}(]-2,-1]) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad f^{-1}([0,2]) = \mathbb{R}_+.}$$

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'inégalité triangulaire donne $|x+y| \leqslant |x| + |y|$. Comme f est strictement croissante, si on l'applique à $|x+y|$ et $|x|+|y|$, on obtient :

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} = f(|x+y) \leqslant f(|x|+|y|) = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

   puisque $|x| \geqslant 0$ et $|y| \geqslant 0$. On a démontré l'inégalité souhaitée.

Exercice 4. On rappelle qu'on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Procédons par double inclusion.
   - Soit $\underline{z \in B} = \left\{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : z = \frac{1+\lambda i}{\lambda + i}\right\}$. Montrons que $z \in A = \mathbb{U} \backslash \{i\}$.

     Comme $z \in B$, il existe un réel λ tel que $z = \dfrac{1+\lambda i}{\lambda+i}$.
     - on commence par vérifier que z ne peut pas être i : si $i = \frac{1+\lambda i}{\lambda+i}$, alors $i(\lambda+i) = 1 + \lambda i$ et donc $-1 = 1$, c'est absurde. Donc $z \neq i$.
     - montrons à présent que z est de module 1 :

$$|z| = \left|\frac{1+\lambda i}{\lambda+i}\right| = \frac{|1+\lambda i|}{\lambda+i} = \frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 1.$$

     Bref, on a montré que $\underline{z \in A}$. On a donc prouvé l'inclusion $\boxed{B \subset A}$.

- Soit $\underline{z \in A}$. Montrons qu'il existe un réel λ tel que $z = \frac{1+\lambda i}{\lambda+i}$.
Commençons par résoudre cette dernière équation d'inconnue a priori complexe λ.
Si $\lambda \in \mathbb{C}$,
$$z = \frac{1+\lambda i}{\lambda+i} \iff z(\lambda+i) = 1+\lambda i \iff \lambda = \frac{1-iz}{z-i}.$$
Notons que la dernière étape est possible grâce au fait que $z \neq i$.
Montrons à présent que $\frac{1-iz}{z-i}$ est en fait réel. Pour cela on calcule sa quantité conjuguée :
$$\overline{\left(\frac{1-iz}{z-i}\right)} = \frac{\overline{1-iz}}{\overline{z-i}} = \frac{1+i\bar{z}}{\bar{z}+i} = \frac{1+\frac{i}{z}}{\frac{1}{z}+i} = \frac{-iz+1}{-i+z}$$
en multipliant en haut et en bas par $-iz$. On a montré que $\frac{1-iz}{z-i}$ était son propre conjugué, donc c'est un réel, et on a donc l'existence d'un réel λ tel que $z = \frac{1+\lambda i}{\lambda+i}$. On a montré que $\underline{z \in B}$, et donc prouvé l'inclusion $\boxed{A \subset B}$.

Par double inclusion on a montré que $\boxed{\mathbb{U}\backslash\{1\} = \left\{\frac{1+\lambda i}{\lambda+i} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$

Exercice 5 (Somme des inverses).

1. $\mathcal{A} = \left\{\frac{2k+1}{2q} \mid k \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{Z}^*\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \ \mid\ \exists (k,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \text{ tq } x = \frac{2k+1}{2q}\right\}$
Montrons par l'absurde que $\mathcal{A}$ ne contient aucun entier. S'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $m \in \mathcal{A}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $m = \frac{2k+1}{2q}$. Donc $2qm = 2k+1$. On obtient donc l'égalité entre un nombre pair et un nombre impair.
Contradiction.
Conclusion : $\underline{\mathcal{A} \text{ ne contient aucun entier.}}$

2. Puisque n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2p$. Supposons que $S_n \in \mathcal{A}$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $S_n = \frac{2k+1}{2q}$. On a alors :
$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} = \frac{2k+1}{2q} + \frac{1}{2p+1} = \frac{(2k+1)(2p+1)+2q}{2q(2p+1)} = \frac{2(2kp+k+p+q)+1}{2q(2p+1)}$$
Ce dernier nombre est le quotient d'un impair sur un pair. Donc $\underline{S_{n+1} \in \mathcal{A}.}$

3. Récurrence : pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{H}(p)$: " $\exists r_p, s_p \in \mathbb{N}\ :\ I_p = \frac{r_p}{2s_p+1}$ ".
Initialisation. $I_0 = 1 = \dfrac{1}{2 \times 0 + 1}$. Donc $\underline{\mathcal{H}(0)}$ est vraie en prenant $r_0 = 1$ et $s_0 = 0$.
Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$. $\underline{\text{Supposons } \mathcal{H}(p)}$. Montrons $\mathcal{H}(p+1)$, c'est-à-dire :
$$\text{" } \exists r_{p+1}, s_{p+1} \in \mathbb{N}\ :\ I_{p+1} = \frac{r_{p+1}}{2s_{p+1}+1} \text{ "}$$
On écrit pour cela :
$$\begin{aligned} I_{p+1} &= I_p + \frac{1}{2p+3} = \frac{r_p}{2s_p+1} + \frac{1}{2p+3} \qquad (\text{d'après } \mathcal{H}(p)) \\ &= \frac{r_p(2p+3)+(2s_p+1)}{(2s_p+1)(2p+3)} = \frac{r_p(2p+3)+(2s_p+1)}{2(2ps_p+p+3s_p+2)+1} \end{aligned}$$
En posant $r_{p+1} = r_p(2p+3)+(2s_p+1)$ et $s_{p+1} = 2ps_p+p+3s_p+2$, on obtient donc $\underline{\mathcal{H}(p+1)}$.
Conclusion. Par récurrence, on a montré que $\underline{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ \mathcal{H}(p) \text{ est vraie.}}$

4. a. Par séparation des indices pairs et impairs, on a :
$$S_{2p+2} = \sum_{k=1}^{2p+2} \frac{1}{k} = \left(\sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{2j}\right) + \left(\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{2j+1}\right)$$
Par factorisation par $\frac{1}{2}$, la première somme vaut $\frac{1}{2}S_{p+1}$. La seconde somme est précisément I_p. On obtient donc bien : $\boxed{S_{2p+2} = \frac{1}{2}S_{p+1} + I_p.}$

b. D'après la question 3., il existe $r_p, s_p \in \mathbb{N}$ tels que $I_p = \dfrac{r_p}{2s_p+1}$. Si de plus on suppose que S_{p+1} appartient à $\mathcal{A}$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $S_{p+1} = \dfrac{2k+1}{2q}$. On obtient donc :

$$S_{n+1} = S_{2p+2} = \frac{1}{2}S_{p+1} + I_p = \frac{2k+1}{4q} + \frac{r_p}{2s_p+1} = \frac{(2k+1)(2s_p+1)+4qr_p}{4q(2s_p+1)}$$

Cette dernière quantité est bien le quotient d'un entier impair ("impair × impair + pair") sur un entier pair. Cela prouve : $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

5. Nous avons tous les éléments pour faire une **récurrence forte**.
Pour tout $n \geqslant 2$, on note : $\mathcal{H}(n)$: "$S_n \in \mathcal{A}$".
Initialisation. $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Il s'agit bien du quotient d'un impair sur un pair, donc $S_2 \in \mathcal{A}$, d'où $\mathcal{H}(2)$.
Hérédité. Soit $n \geqslant 2$. Supposons que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Montrons $\mathcal{H}(n+1)$, c'est-à-dire que $S_{n+1} \in \mathcal{A}$. On fait alors la disjonction de cas suivante :

- Si n est pair, la question 2. combinée au fait que l'on a supposé $\mathcal{H}(n)$ permet de conclure que $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.
- Si n est impair : $n = 2p+1$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, et comme $n \geqslant 3$, on a $p \geqslant 1$. Donc $p+1 \geqslant 2$ (et bien évidemment $p+1 \leqslant n$). Donc par hypothèse de récurrence, $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie, et $S_{p+1} \in \mathcal{A}$. La question 4.b. permet alors de conclure que $S_{n+1} \in \mathcal{A}$.

Dans les deux cas, on a bien $S_{n+1} \in \mathcal{A}$, ce qui prouve $\mathcal{H}(n+1)$.
Conclusion. On a montré par récurrence forte que pour tout $n \geqslant 2$, $S_n \in \mathcal{A}$, et d'après la question 1., cela implique que $\boxed{\forall n \geqslant 2, S_n \notin \mathbb{N}.}$

Exercice 6. Soit $X \in \mathcal{P}(\Omega)$. On a la chaîne d'équivalences

$$\begin{aligned}(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \varnothing &\iff \begin{cases} A \cap X = \varnothing \\ B \cap \overline{X} = \varnothing \end{cases} \\ &\iff B \subset X \subset \overline{A}.\end{aligned}$$

On a montré que l'ensemble des solutions est l'ensemble des parties de Ω contenues dans $\overline{A}$ et contenant B. En particulier, l'équation a une solution si et seulement si $B \subset \overline{A}$, c'est-à-dire si et seulement si A et B sont disjoints.