DS n°2

Durée : 4 heures.

Consignes de présentation :

- Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
- La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation. Il vous est demandé :
  - d'encadrer les résultats principaux,
  - de souligner les résultats et arguments intermédiaires importants,
  - de soigner votre écriture,
  - de maintenir une marge dans vos copies et d'aérer vos copies,
  - de numéroter vos copies et de les rendre dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.
- Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Ce sujet contient **4 pages**.
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. *Les quatre questions suivantes sont indépendantes.*

1. Calculer les dérivées de fonctions suivantes, après avoir précisé le domaine de dérivabilité :

$$f : x \mapsto x^3 \arccos(x)^2 \qquad g : x \mapsto \frac{\left(1+x^2\right)^2}{\sqrt{1+x^2}} \qquad h : x \mapsto \left(1+\sqrt{x}\right)^{\ln(x)}.$$

2. Résoudre l'équation $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} = 1$ d'inconnue réelle x.

3. Montrer l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

4. Donner la forme exponentielle de $3-\sqrt{3}i$ et $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ puis en déduire la forme algébrique de $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^{12}$.

———————————————————————

Exercice 2. Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions.
Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

4. Les deux applications suivantes sont-elles injectives ?

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n^2+n \end{array} \right. \qquad v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & 2n^2+n \end{array} \right.$$

———————————————————————

Exercice 3. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right) - \dfrac{x}{2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et montrer que c'est une fonction paire.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Calculer la dérivée de f là où f est dérivable et montrer que $f'(x)$ est alors du signe de $\mathrm{e}^x - 1$.

4. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant \ln(2)$.

5. Montrer que pour tous réels a et b, on a $\ln\left(\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b\right) \geqslant \dfrac{a+b}{2} + \ln(2)$.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(2) + \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

Exercice 4. On note $\mathcal{C}_{\exp}$ le graphe de la fonction exponentielle et $\mathcal{C}_{\ln}$ celui de la fonction logarithme. On s'intéresse aux tangentes communes aux deux graphes, c'est-à-dire aux droites qui sont à la fois tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ et à $\mathcal{C}_{\ln}$ (mais en des points différents).

1. Représenter dans un même repère les graphes $\mathcal{C}_{\exp}$ et $\mathcal{C}_{\ln}$.
   Remarque. Si votre dessin est correct, vous devez constater qu'il existe deux tangentes communes (que vous pouvez ajouter à votre dessin). La suite de l'exercice consiste à démontrer ce résultat.

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note D_a la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point d'abscisse a et pour $b \in \mathbb{R}_+^*$, on note T_b la tangente à $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse b.

   a. Donner une équation de D_a et préciser le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de cette droite.

   b. Faire de même pour T_b.

   c. Montrer que D_a et T_b sont parallèles si et seulement si $b = \mathrm{e}^{-a}$.

   d. Montrer que D_a et T_b ont même ordonnée à l'origine si et seulement si $\ln(b) = (1-a)\mathrm{e}^a + 1$.

   e. En déduire que D_a et T_b sont confondues si et seulement si $\begin{cases} b = \mathrm{e}^{-a}, \\ 0 = (1-a)\mathrm{e}^a + 1 + a. \end{cases}$

3. On considère la fonction $f : t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t + 1 + t$.

   a. Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $f(t) = 0 \Leftrightarrow f(-t) = 0$.

   b. Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ vers un intervalle J à préciser.

   c. En déduire que l'équation $f(t) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.
      On note α l'une de ces deux solutions.

4. Conclure que les droites D_α et $D_{-\alpha}$ sont chacune tangente à la fois à $\mathcal{C}_{\exp}$ et à $\mathcal{C}_{\ln}$, et que ce sont les seules. Justifier que D_α et $D_{-\alpha}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

5. a. Calculer $\operatorname{th}\alpha$ en fonction de α.

   b. Déterminer une expression simple, en fonction de α, des coordonnées de l'intersection de D_α et de $D_{-\alpha}$.

Exercice 5 (Suite de Sylvester)**.** On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + \prod_{k=0}^{n} s_k$.

On rappelle que si une suite est majorée et croissante (ou minorée et décroissante), alors elle converge.

1. a. Calculer s_1, s_2 et s_3.

   b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $s_{n+1} = 1 + (s_n - 1)s_n$.

   c. Montrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $s_n \geqslant n! + 1$
      On admet que l'on peut en déduire qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{2^n}{s_n} \leqslant M$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$.

   a. Montrer que (T_n) est majorée en utilisant le résultat admis ci-dessus.

   b. Conclure que (T_n) converge.

   c. Pour $k \in \mathbb{N}$, simplifier $\dfrac{1}{s_k - 1} - \dfrac{1}{s_{k+1} - 1}$.

   d. En déduire une expression de T_n en fonction de s_{n+1}.

   e. Retrouver le résultat de la question b. en précisant la valeur de la limite de (T_n).

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{\ln(s_n)}{2^n}$.

   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n^2 \geqslant s_{n+1}$, puis déterminer les variations de (u_n).

   b. En déduire que (u_n) converge. On note ℓ la valeur de cette limite.

4. On souhaite maintenant encadrer la valeur de cette limite ℓ.

   a. Justifier que pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln\big(s_{n+1}\big) \geqslant \ln(s_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(s_k)$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2}$. *Indication : récurrence forte.*

   c. Conclure que $\dfrac{\ln(2)}{2} \leqslant \ell \leqslant \ln(2)$.

———————————————————————

Exercice 6. Pour α et β deux réels strictement positifs, on pose

$$\varphi_{\alpha,\beta} : x \longmapsto \left(\frac{\alpha^x + \beta^x}{2}\right)^{1/x}.$$

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. On note $f : x \mapsto a^x$.

   a. Déterminer le domaine de définition de f.

   b. Justifier que f est dérivable sur son domaine de définition et donner une expression de sa dérivée.

   c. En déduire les variations de f sur son domaine de définition.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$(1+x)\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) \leqslant x \ln x,$$

   en précisant les cas d'égalité.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. On pose $\psi_a = \varphi_{1,a}$, c'est-à-dire $\psi_a : x \mapsto \left(\dfrac{1+a^x}{2}\right)^{1/x}$.

   a. Déterminer le domaine de définition de ψ_a.

   b. Justifier que ψ_a est dérivable sur son domaine de définition et donner une expression de sa dérivée.

   c. En déduire les variations de ψ_a sur son domaine de définition.

   d. Étudier la limite de ψ_a en $+\infty$.

   e. En déduire la limite de ψ_a en $-\infty$.
   (*On pourra calculer le produit* $\psi_a(x)\psi_a(-x)$ *lorsque celui-ci existe*).

4. En déduire les variations de $\varphi_{\alpha,\beta}$ sur son domaine de définition.

———————————————————————

Exercice 7 (Hors barème)**.** Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star$, qui à un entier n associe le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2^n, est surjective.