DS n°2 - Correction

/15

Exercice 1. *Les quatre questions suivantes sont indépendantes.*

1. Comme arccos est dérivable sur $]-1,1[$, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée : si $x \in]-1,1[$, /2

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 \arccos(x)^2 - \frac{2x^3 \arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

La fonction g est définie pour tout réel x puisque $1+x^2 > 0$. On réécrit g avant de dériver : si $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ donc /2

$$\boxed{g'(x) = 3x\sqrt{1+x^2}.}$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$. On la réécrit à l'aide de l'exponentielle avant de dériver : si $x > 0$, $h(x) = \exp(\ln(x)\ln(1+\sqrt{x}))$ donc /2

$$\boxed{h'(x) = \left(\frac{1}{x}\ln(1+\sqrt{x}) + \ln(x)\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}\right) h(x).}$$

2. L'équation $x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} = 1$ est définie pour tout réel positif x. Si $x \geqslant 0$, on fait le changement de variable $t = x^{\frac{1}{4}}$, qui donne un réel $t \geqslant 0$. Alors x est solution de l'équation si et seulement si t est une racine (positive) de l'équation du second degré $t^2 + t = 1$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour solutions $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. /3

La seule racine positive est donc $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc x solution si et seulement si $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, et alors comme $t^2 = 1 - t$,

$$x = t^4 = (1-t)^2 = 1 + t^2 - 2t = 2 - 3t = \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\boxed{\left\{\frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

3. On définit $f : x \mapsto \operatorname{ch}(x) - 1 - \dfrac{x^2}{2}$: c'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ entier. Étudions ses variations. Si $x \in \mathbb{R}$, /3

$$f'(x) = \operatorname{sh}(x) - x.$$

Ici de deux choses l'une :

- soit on sait que sh est convexe sur $\mathbb{R}_+$, concave sur $\mathbb{R}_-$ et que sa tangente en 0 est la première bissectrice. On en déduit alors (faites un dessin !) directement $\operatorname{sh}(x) \geqslant x$ si $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sh}(x) \leqslant x$ si $x \leqslant 0$.
- soit on dérive à nouveau f' qui se trouve être dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \operatorname{ch}(x) - 1$. Comme $\operatorname{ch} \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}$, f'' est positive sur $\mathbb{R}$, donc f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme f' s'annule en 0, elle est positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$, elle atteint donc son minimum en 0, de valeur $f(0) = 0$; f est donc positive sur $\mathbb{R}$. On a ainsi montré que pour tout réel x, $\boxed{\operatorname{ch}(x) \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}.}$

/3

4. On a $3 - \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{2}i = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.

On en déduit

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12} = \sqrt{3}^{12}\mathrm{e}^{i(-2\pi-3\pi)}\boxed{= -3^6.}$$

Exercice 2. Les deux premiers points ont été traités dans le cours. /10

/2 + /2

3. Supposons $g \circ f$ injective et f est surjective. Montrons que g est injective : /3
Soit y et $\tilde{y}$ dans F tel que $g(y) = g(\tilde{y})$. Comme f est surjective, il existe x et $\tilde{x}$ dans E tels que $y = f(x)$ et $\tilde{y} = f(\tilde{x})$.
Mais alors $gof(x) = g(y) = g(\tilde{y}) = gof(\tilde{x})$. Comme gof est injective, on a donc $x = \tilde{x}$, donc $f(x) = f(\tilde{x})$, donc $y = f(x) = f(\tilde{x}) = \tilde{y}$.
On a bien montré que g est injective.
Version alternative. Comme $g \circ f$ est injective, f est injective d'après 2. Donc f est bijective puisqu'elle est aussi surjective. Alors f admet une bijection réciproque f^{-1}, qui est en particulier injective.
Alors $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ s'écrit comme la composée de deux fonctions injectives $g \circ f$ et f^{-1}, donc g est injective d'après 1.

4. L'application u n'est pas injective puisque $u(-1) = u(0) = 0$. Par contre l'application v est injective. /3
Soit n et m des entiers relatifs tels que $v(n) = v(m)$. Alors on a
$$2n^2 + n = 2m^2 + m, \quad i.e. \quad 2(n^2 - m^2) = m - n, \quad i.e. \quad 2(n-m)(n+m) = m - n.$$
Si $n \neq m$, on peut diviser à gauche et à droite par $n - m$ pour obtenir $2(n + m) = -1$, autrement dit $n + m = -\frac{1}{2}$. C'est exclu puisque n et m sont entiers ! Donc $n = m$, et on a montré que v est injective.

Exercice 3. /10

1. Comme exp est strictement positive, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est paire : si $x \in \mathbb{R}$, /2
$$f(-x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{x}{2} = \ln(e^{-x}(e^x + 1)) + \frac{x}{2} = \ln(e^{-x}) + \ln(e^x + 1) + \frac{x}{2} = \ln(1 + e^x) - \frac{x}{2}$$
puisque $\ln \circ \exp = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. On retombe sur l'expression de $f(x)$, et on a donc montré que $\boxed{f \text{ est paire}}$.

2. Comme f est paire, on regarde plutôt la limite en $-\infty$: comme $\exp(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$, par composition, le ln tend vers 0 et on obtient donc par somme de limite $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par parité, on obtient donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$. /1

3. La fonction $x \mapsto 1 + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $]1, +\infty[$ (d'après les propriétés de l'exponentielle). /2
Par composition, la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car ln est dérivable sur $]1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$).
Ainsi, par somme de fonctions dérivables, $\underline{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - (1 + e^x)}{2(1 + e^x)} = \boxed{\frac{e^x - 1}{2(1 + e^x)}}.$$
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2(1 + e^x) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$.

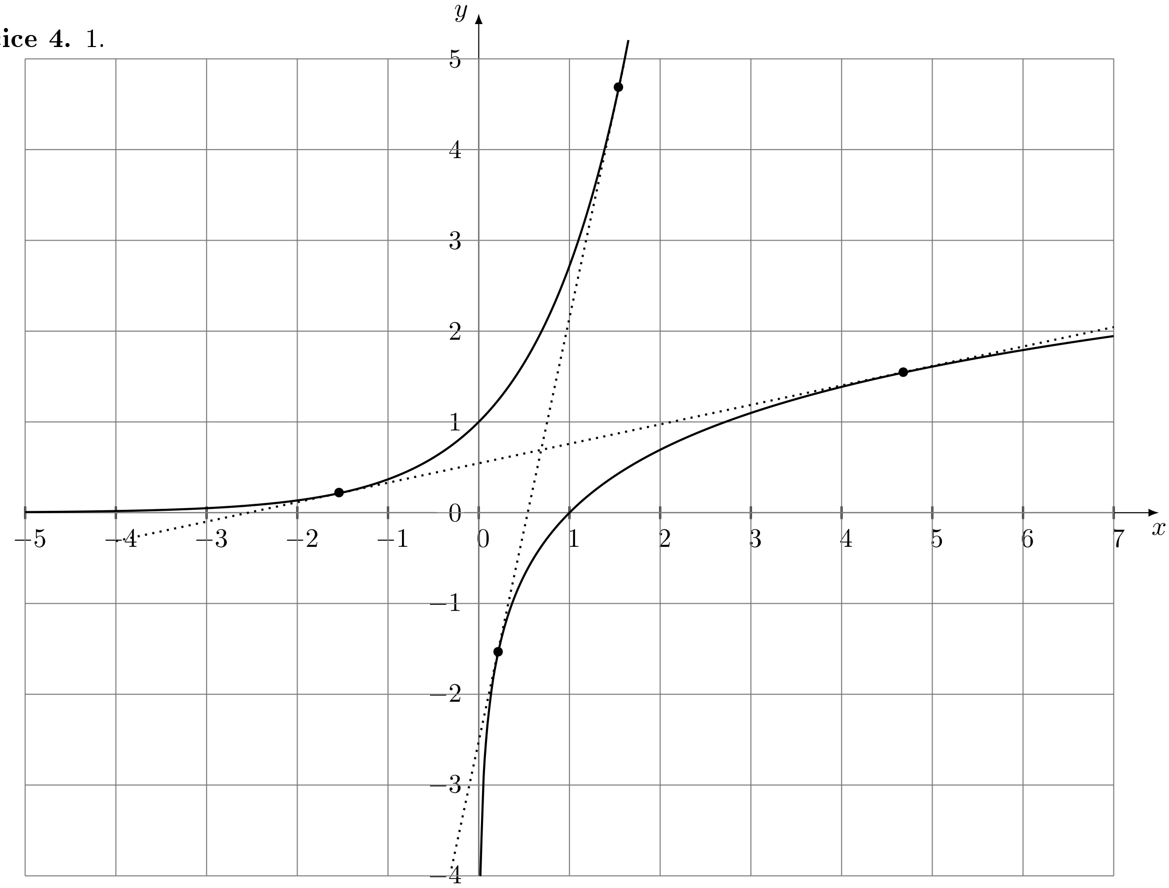
4. D'après la question précédente f' est positive sur $\mathbb{R}_+$, donc $\underline{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$ (car $\mathbb{R}_+$ est un intervalle). /1
De la même manière, $\underline{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_-}$. La fonction f admet donc un minimum en 0, où elle vaut $f(0) = \ln(2)$. Finalement, $\underline{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) \geqslant \ln(2)}$.

5. On réécrit l'inégalité obtenue à la question précédente : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + e^x) \geqslant \frac{x}{2} + \ln(2)$ $(\star)$. /2
Ensuite, pour $a, b \in \mathbb{R}$,
$$\ln\big(e^a + e^b\big) = \ln\big(e^a(1 + e^{b-a})\big) = \ln(e^a) + \ln(1 + e^{b-a}) = a + \ln(1 + e^{b-a}) \geqslant a + \frac{b-a}{2} + \ln(2) = \frac{b+a}{2} + \ln(2)$$
où l'on a appliqué l'inégalité $(\star)$ avec $x = b - a \in \mathbb{R}$.

6. Pour retrouver l'expression voulue, on remplace $-\frac{x}{2}$ par $-\ln\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et on rassemble la différence de ln : si $x \in \mathbb{R}$, /2
$$f(x) = \ln(1 + e^x) - \ln\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^{\frac{x}{2}}}\right) = \ln\left(e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}\right) = \ln \mathrm{ch}(x) + \ln 2$$
puisque $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{2}}}{2}$. On a démontré le résultat voulu, à partir duquel on retrouve aisément le résultat des quatre premières questions de l'exercice.

Exercice 4. 1. **/20**

/2



2. a. Équation de D_a : $y = \mathrm{e}^a(x-a) + \mathrm{e}^a$, coefficient directeur : e^a, ordonnée à l'origine : $(1-a)\mathrm{e}^a$. /2

   b. Équation de T_b : $y = \frac{1}{b}(x-b) + \ln(b)$, coefficient directeur : $\frac{1}{b}$, ordonnée à l'origine : $\ln(b) - 1$. /1

   c. Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur. Dans notre cas, cela donne /0,5

$$D_a \text{ parallèle à } T_b \iff \mathrm{e}^a = \frac{1}{b} \iff \mathrm{e}^{-a} = b.$$

   d. D'après les questions (a) et (b), /0,5

$$D_a \text{ et } T_b \text{ ont même ordonnée à l'origine si et seulement si} \quad (1-a)\mathrm{e}^a = \ln(b) - 1 \iff \ln(b) = (1-a)\mathrm{e}^a + 1.$$

   e. Deux droites sont confondues si et seulement si elles sont parallèles (c'est à dire même coefficient directeur) et elles ont même ordonnées à l'origine, ce qui donne d'après les résultats précédents : /1

$$D_a \text{ et } T_b \text{ sont confondues} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^{-a} = b \\ \ln(b) = (1-a)\mathrm{e}^a + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mathrm{e}^{-a} = b \\ \ln(\mathrm{e}^{-a}) = (1-a)\mathrm{e}^a + 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \mathrm{e}^{-a} = b \\ 0 = (1-a)\mathrm{e}^a + 1 + a \end{cases}.$$

3. a. Pour $t \in \mathbb{R}$, /1

$$f(-t) = 0 \iff (1+t)\mathrm{e}^{-t} + 1 - t = 0 \iff \big((1+t)\mathrm{e}^{-t} + 1 - t\big)\mathrm{e}^t = 0 \quad \text{car } \mathrm{e}^t \neq 0$$
$$\iff 1 + t + (1-t)\mathrm{e}^t = 0 \iff f(t) = 0$$

Remarque : cela ne signifie pas que f est paire, seulement que si elle s'annule en un point, alors elle s'annule aussi en l'opposé de ce point.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -te^t + 1$. En particulier, $\forall t \in]-\infty, 0]$, $f'(t) > 0$. /3
De plus, $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ en utilisant la limite de croissance comparée $te^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, et $f(0) = 2$.
Ainsi, f étant <u>strictement croissante et continue</u> sur l'<u>intervalle</u> $]-\infty, 0]$, elle réalise une bijection de $]-\infty, 0]$ vers $\boxed{J =]-\infty, 2]}$.

c. $0 \in]-\infty, 2]$ donc 0 admet un unique antécédent par f dans $]-\infty, 0]$ d'après la question précédente. /2
Notons α cet antécédent.
Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) = 0 \Leftrightarrow f(-t) = 0 \Leftrightarrow -t = \alpha$ car $-t \in \mathbb{R}_-$ et α est le seul nombre négatif où f s'annule.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions dans $\mathbb{R}$, α et $-\alpha$.

4. Les droites D_α et $T_{e^{-\alpha}}$ sont confondues d'après la question 2.(c) donc cette droite est tangente à la fois à $\mathcal{C}_{\exp}$ et à $\mathcal{C}_{\ln}$. De même pour $D_{-\alpha}$. /3
La condition obtenue en 2.(c) étant nécessaire, il n'y pas d'autre droite qui vérifie cela.
On note S la symétrie par rapport à la première bissectrice. Comme exp et ln sont réciproques l'une de l'autre, $S(\mathcal{C}_{\exp}) = \mathcal{C}_{\ln}$ et $S(\mathcal{C}_{\ln}) = \mathcal{C}_{\exp}$.
Comme D_α est tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ et à $\mathcal{C}_{\ln}$, $S(D_\alpha)$ est tangente à $S(\mathcal{C}_{\exp}) = \mathcal{C}_{\ln}$ et à $S(\mathcal{C}_{\ln}) = \mathcal{C}_{\exp}$. Donc $S(D_\alpha)$ est à la fois tangente aux deux courbes : c'est soit D_α, soit $D_{-\alpha}$. Mais D_α n'est pas symétrique par rapport à la première bissectrice (sinon son coefficient directeur serait 1, or $\alpha \neq 0$), donc $\boxed{S(D_\alpha) = D_{-\alpha}.}$

5. a. On sait que $f(\alpha) = 0$, donc $1 + \alpha = (\alpha - 1)e^\alpha$ et ainsi $e^\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$. En procédant de même pour $-\alpha$, on obtient aussi $e^{-\alpha} = \dfrac{-\alpha+1}{-\alpha-1} = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$. Alors : /2

$$\operatorname{th}(\alpha) = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \frac{\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}{\frac{\alpha+1}{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}} = \frac{(1+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2}{(1+\alpha)^2 + (1-\alpha)^2} = \frac{4\alpha}{2(1+\alpha^2)} = \boxed{\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}.}$$

b. On cherche le point (x, y) tel que $y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha$ et $y = e^{-\alpha}(x + \alpha) + e^{-\alpha}$. Or, on a /2

$$\begin{aligned} e^\alpha(x-\alpha) + e^\alpha = e^{-\alpha}(x+\alpha) + e^{-\alpha} &\iff x(e^\alpha - e^{-\alpha}) = \alpha(e^{-\alpha} + e^\alpha) + e^{-\alpha} - e^\alpha \\ &\iff x = \frac{\alpha}{\operatorname{th}(\alpha)} - 1. \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi passer par les équations de T_{e^α} et $T_{e^{-\alpha}}$, pour un calcul un peu plus court.
Donc (x, y) est un point d'intersection si et seulement si $x = \frac{\alpha}{\operatorname{th}(\alpha)} - 1 = \frac{1+\alpha^2}{2} - 1 = \frac{\alpha^2-1}{2}$ et $y = e^\alpha(x - \alpha) + e^\alpha$.
Comme D_α et $D_{-\alpha}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice, leur intersection est située sur cette bissectrice, et ce point d'intersection est donc $\boxed{\left(\dfrac{\alpha^2-1}{2}, \dfrac{\alpha^2-1}{2}\right).}$

Exercice 5. **/20**

1. a. $s_1 = 1 + 2 = 3$, $s_2 = 1 + 2 \times 3 = 7$ et $s_3 = 1 + 2 \times 3 \times 7 = 43$. /1

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a /1

$$s_{n+1} = 1 + \prod_{k=1}^{n} s_k = 1 + s_1 \times \cdots \times s_{n-1} \times s_n = 1 + \left(\prod_{k=1}^{n-1} s_k\right) \times s_n \qquad \text{et} \qquad s_n - 1 = 1 + \prod_{k=1}^{n-1} s_k - 1 = \prod_{k=1}^{n-1} s_k.$$

Ainsi, on a bien $\boxed{s_{n+1} = 1 + (1 - s_n)s_n.}$

c. On a $s_0 = 2$ et $0! + 1 = 2$, et donc la propriété est vraie au rang $n = 0$. /2
Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant n! + 1$. On a donc $s_n - 1 \geqslant n!$ et $s_n \geqslant n + 1$ car $n! \geqslant n$, et ainsi

$$s_{n+1} = 1 + (s_n - 1)s_n \geqslant 1 + n!(n+1) = 1 + (n+1)!$$

ce qui montre la propriété au rang $n + 1$.
Par récurrence, on conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n \geqslant n! + 1.}$

Comme $n!+1 \to +\infty$, et $s_n \geqslant n!+1$, par comparaison on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty.}$

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \frac{2^n}{s_n} \leqslant \frac{2^n}{n!+1} = \frac{2^n}{n!}\frac{1}{1+\frac{1}{n!}}$ et par croissances comparées, on sait $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{s_n} = 0}$.

2. a. Tout d'abord $(\frac{2^n}{s_n})$ est bornée car c'est une suite convergente d'après 1.(d). Notons M un de ses majorants. /2
On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{2^k}{s_k} \leqslant M$, ou autrement dit $\frac{1}{s_k} \leqslant M(\frac{1}{2})^k$. En sommant ces inégalités jusqu'au rang $n \in \mathbb{N}$, on obtient :
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = M\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 2M$$
Ainsi, la suite (T_n) est majorée par $2M$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{s_{n+1}} \geqslant 0$, donc la suite (T_n) est croissante, et comme elle est de plus majorée (cf. quest. précédente), on en déduit que $\boxed{(T_n) \text{ converge.}}$ /1

c. Pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant le résultat de 1.(b), /2
$$\frac{1}{s_k-1} - \frac{1}{s_{k+1}-1} = \frac{1}{s_k-1} - \frac{1}{(s_k-1)s_k} = \frac{s_k-1}{(s_k-1)s_k} = \boxed{\frac{1}{s_k}}.$$

d. En utilisant le résultat précédent, puis une somme télescopique, on obtient /1
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k-1} - \frac{1}{s_{k+1}-1} = \frac{1}{s_0-1} - \frac{1}{s_{n+1}-1} = \boxed{1 - \frac{1}{s_{n+1}-1}}.$$

e. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n+1} = +\infty$, on en déduit par opération sur les limites que $\boxed{T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.}$ /1

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1.(b) on a, $s_{n+1} = 1 + s_n^2 - s_n$ et $1 - s_n \leqslant -n! \leqslant 0$ donc $s_{n+1} \leqslant s_n^2$. De plus, /3
$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(s_{n+1})}{2^{n+1}} - \frac{\ln(s_n)}{2^n} = \frac{\ln(s_{n+1}) - 2\ln(s_n)}{2^{n+1}} = \frac{\ln(s_{n+1}) - \ln(s_n^2)}{2^{n+1}}.$$
Et comme $\ln(s_{n+1}) \leqslant \ln(s_n^2)$ par croissance du logarithme et $2^{n+1} > 0$, on en déduit que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. Ainsi, la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geqslant 1$, donc $u_n = \frac{\ln(s_n)}{2^n} \geqslant 0$. Autrement dit, (u_n) est minorée par 0. Comme elle est de plus décroissante, (u_n) converge. /1

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $s_{n+1} = 1 + \prod\limits_{k=0}^{n} s_k \geqslant \prod\limits_{k=0}^{n} s_k$, donc par croissance du logarithme : /1
$$\ln(s_{n+1}) \geqslant \ln\left(\prod_{k=0}^{n} s_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln(s_k) = \ln(s_0) + \sum_{k=1}^{n} \ln(s_k).$$

b. Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![1,n]\!], u_k \geqslant \lambda$. Montrons $\mathcal{P}(n)$ par récurrence. /3
Tout d'abord, $u_1 = \frac{\ln(s_1)}{2} = \frac{\ln(3)}{2} \geqslant \lambda$. Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Ensuite, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u_k \geqslant \lambda$, c'est à dire $\ln(s_k) \geqslant \lambda 2^k$. On a donc, en sommant ces inégalités :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(s_k) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda 2^k = \lambda\left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) = \lambda 2^{n+1} - 2\lambda$$
puis d'après le résultat précédent :
$$\ln(s_{n+1}) \geqslant \ln(s_0) + \sum_{k=1}^{n} \ln(s_k) \geqslant \ln(2) + \lambda 2^{n+1} - 2\lambda = \lambda 2^{n+1} \quad \text{car } \ln(2) - 2\lambda = 0.$$

Ainsi, $u_{n+1} = \frac{\ln(s_{n+1})}{2^{n+1}} \geqslant \lambda$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

c. Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \lambda = \frac{\ln(2)}{2}$. Par passage à la limite (car on sait que (u_n) converge), on obtient donc $\boxed{\ell \geqslant \frac{\ln(2)}{2}}$. Et par décroissante de la suite on a $u_n \leqslant u_0 = \ln(2)$, donc on obtient de même $\boxed{\ell \leqslant \ln(2).}$ /1

Exercice 6. 1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et $f : x \mapsto a^x$. **/15**

a. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car $f(x) = \exp(x \ln(a))$. /1

b. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (\ln a)e^{x \ln a} = (\ln a)a^x$ /1

c. L'exponentielle réelle est strictement positive, donc le signe de f' dépend uniquement de celui de $\ln a$. /1

- Si $a \in]0,1[$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a \in]1,+\infty[$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On définit /3

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \ln x - (1+x) \ln\left(\frac{1+x}{2}\right). \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable par opérations.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $g'(x) = \ln x + 1 - \ln\left(\dfrac{1+x}{2}\right) - 1 = \ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)$.
La quantité $\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)$ est du même signe que $\frac{2x}{1+x} - 1 = \frac{x-1}{2x}$, qui est à son tour du même signe que $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	?

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x \ln x - (1+x) \ln\left(\dfrac{1+x}{2}\right) \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et $\psi_a = \varphi_{1,a} : x \mapsto \left(\frac{1+a^x}{2}\right)^{1/x}$.

a. Si $x \in \mathbb{R}$, l'expression a^x est définie et $\frac{1+a^x}{2} > 0$; donc seule la puissance $1/x$ restreint le domaine de définition de ψ_a. Ainsi, ψ_a est définie sur $\mathbb{R}^*$. /1

b. ψ_a est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et après calculs, on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, /2

$$\psi_a{}'(x) = \left(\frac{1+a^x}{2}\right)^{1/x} \times \frac{2}{1+a^x} \times \frac{x a^x \ln a - (1+a^x)\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right)}{2x^2}.$$

c. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $\left(\frac{1+a^x}{2}\right)^{1/x} > 0$, $\frac{2}{1+a^x} > 0$ et $2x^2 > 0$ donc le signe de $\psi_a{}'(x)$ est celui de $x a^x \ln a - (1 + a^x)\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right)$. /1
Or, comme $x \neq 0$ et $a \neq 1$, a^x est un réel strictement positif différent de 1, donc d'après la question 2.

on a :

$$a^x \ln(a^x) > (1+a^x)\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right) \quad \text{c'est-à-dire} \quad a^x x \ln a > (1+a^x)\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right).$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, ${\psi_a}'(x) > 0$. On en déduit que ψ_a est strictement croissante sur les intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

d. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_a(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right)\right)$ et $\lim_{x\to+\infty} a^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln a} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ln a > 0 \\ 0 & \text{si } \ln a < 0. \end{cases}$ /2

- Si $a \in]0,1[$ alors $\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = \lim_{y\to 0} e^y = 1$.
- Si $a \in]1,+\infty[$ alors pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+a^x}{2}\right) &= \frac{1}{x}\ln\left(a^x\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{x}\ln(a^x) + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^x}\right) \\
&= \ln a + \underbrace{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2a^x}\right)}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0} \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln a.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = \lim_{y\to\ln a} e^y = a$.

En résumé,

- si $a \in]0,1[$ alors $\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = 1$.
- si $a \in]1,+\infty[$ alors $\lim_{x\to+\infty} \psi_a(x) = a$.

e. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a : /1

$$\begin{aligned}
\psi_a(x)\psi_a(-x) &= \left(\frac{1+a^x}{2}\right)^{1/x} \times \left(\frac{1+a^{-x}}{2}\right)^{-1/x} \\
&= \frac{\left(\frac{1+a^x}{2}\right)^{1/x}}{\left(\frac{1+a^{-x}}{2}\right)^{1/x}} \\
&= \left(\frac{1+a^x}{1+a^{-x}}\right)^{1/x} \\
&= \left(\frac{a^x(1+a^{-x})}{1+a^{-x}}\right)^{1/x} \\
&= a.
\end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\psi_a(-x) = \frac{a}{\psi_a(x)}$.
Ainsi,

- si $a \in]0,1[$ alors $\lim_{x\to-\infty} \psi_a(x) = \frac{a}{1} = a$.
- si $a \in]1,+\infty[$ alors $\lim_{x\to-\infty} \psi_a(x) = \frac{a}{a} = 1$.

4. Tout d'abord $\varphi_{\alpha,\beta}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. Fixons $x \in \mathbb{R}^*$. On a : /2

$$\begin{aligned}
\varphi_{\alpha,\beta}(x) &= \left(\frac{\alpha^x + \beta^x}{2}\right)^{1/x} \\
&= \left(\frac{\alpha^x \left(1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x\right)}{2}\right)^{1/x} \\
&= \alpha \times \left(\frac{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^x}{2}\right)^{1/x} \\
&= \alpha \psi_{\frac{\beta}{\alpha}}(x).
\end{aligned}$$

- Si $\alpha = \beta$, alors $\varphi_{\alpha,\alpha}(x) = (\alpha^x)^{1/x} = \alpha$ donc $\varphi_{\alpha,\alpha}$ est la fonction constante égale à α.
- Si $\alpha \neq \beta$, et puisque $\alpha > 0$, $\varphi_{\alpha,\beta}$ a les mêmes variations que la fonction $\psi_{\frac{\beta}{\alpha}}$, qui a été étudiée à la question 3. Ainsi, $\varphi_{\alpha,\beta}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 7 (Hors barème)**.** L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^\star$, qui à un entier n associe le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de 2^n, est donnée si $n \in \mathbb{N}$ par :

$$f(n) = \lfloor \log_{10}(2^n) \rfloor + 1 = \lfloor n \log_{10} +^(2) \rfloor + 1.$$

Or $\log_{10}(2) = \frac{\ln 2}{\ln 10} < 1$. Et pour toute constante a plus petite que 1, la fonction $n \mapsto \lfloor an \rfloor$ est surjective, donc f l'est également.