DS n°5 : Sujet 1

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont évaluées.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
*Ce sujet contient **3 pages**.*
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1 (Préliminaires)**.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : pour C, on pourra déterminer C^2, en déduire que C est inversible, et déterminer C^{-1}.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont définies sur un même domaine D que l'on précisera.
2. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\cos(2\theta)$ et $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
   b. Soit $x \in D$. Calculer $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ (donner une expression polynomiale).
3. a. Montrer que $\forall x \in D, \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$.
   b. Étudier la parité de la fonction f_n en fonction de n.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall x \in D, f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = 2x f_n(x)$.

Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$.

5. a. Montrer que f_n est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ et calculer $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1 - x^2) f_n''(x) - x f_n'(x) + n^2 f_n(x) = 0$.
6. a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$.
   b. Montrer que f_n est dérivable en 1 et déterminer $f_n'(1)$.
   c. En déduire que f_n est dérivable en -1 et déterminer $f_n'(-1)$.

Exercice 3. Trois amies, P., V. et F., décident de s'affronter au jeu de course Mario Kart 8.
Le jeu comporte 48 courses, organisées en 12 coupes de 4 courses chacune. Les trois amies créent donc une grille de 48 cases, puis s'affrontent sur chacune des 48 courses. A chaque fin de course, elles notent dans la case correspondant à la course l'initiale de la gagnante de la course : P, V ou F. On s'intéresse à la grille à la fin de la compétition (qui est donc intégralement remplie).

1. Combien y a-t-il de grilles possibles ?
2. Sachant que P. a gagné au moins une course, combien y a-t-il de grilles possibles ?
   Conseil : considérer "l'évènement contraire" peut être utile.
3. Sachant que P. a gagné exactement 10 courses, combien y a-t-il de grilles possibles ?
4. Sachant que P. a gagné exactement 10 courses et V. exactement 18, combien y a-t-il de grilles possibles ?
5. Si la seule information que l'on a est que F. a gagné au plus 2 courses par coupe, combien y a-t-il de grilles possibles ?

Exercice 4. On considère les 3 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculs de puissances de matrices.
   a. Calculer les matrices L^2, M^2, LM et ML.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $L^n = 3^{n-1}L$ et $M^n = 3^{n-1}M$.
   c. Déterminer des réels a et b tels que $A = aL + bM$.
   d. En déduire que $A^n = \frac{1}{3}\big((-1)^n L + 2^n M\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit de plus les matrices colonnes suivantes :

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + U.$$

2. Calculer X_1 puis X_2.
3. Première méthode pour exprimer X_n à l'aide des puissances de A.
   a. Déterminer $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = AY + U$
   b. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $X_n - Y = A^n\big(X_0 - Y\big)$.
4. Deuxième méthode.
   a. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = A^n X_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) U$.
   b. Exprimer, à l'aide des matrices L et M, la matrice $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$.
5. Déterminer explicitement, à l'aide de la question 3 ou 4, les coefficients de X_7.

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$ telle que

$$\begin{cases} f(a) > 0 \text{ et } f(b) < 0 \\ \forall x \in [a,b], f'(x) < 0 \\ \forall x \in [a,b], f''(x) > 0 \end{cases}$$

1. Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in]a,b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
2. Soit $x_0 \in [a,b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 et de l'axe des abscisses.

Le but de ce problème est d'étudier la méthode de Newton, qui est une méthode numérique efficace d'approximation de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à linéariser l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0. On introduit pour cela la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \end{array}$$

et on définit par récurrence la suite (x_n), avec le terme initial x_0 introduit plus haut et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$.

Exemple.

3. Dans cette question, on cherche une approximation de $\sqrt{3}$. Pour cela, on considère la fonction $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - x^2$ pour $x \in [1,3]$.
   a. Tracer la courbe représentative de f.
   b. Prenons $x_0 = 3$. Construire graphiquement les deux premiers termes de la suite (x_n).

Étude de la fonction g

4. Justifier que la fonction g est bien définie sur $[a, b]$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Calculer sa fonction dérivée. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
5. Le but de ces questions est de montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2$.
   a. Justifier qu'il existe $m > 0$ tel que
   $$\forall t \in [a, b],\ |f'(t)| \geqslant m$$
   et justifier qu'il existe $M > 0$ tel que
   $$\forall t \in [a, b],\ |f''(t)| \leqslant M$$
   b. Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que
   $$\forall t \in [a, b],\ |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$$
   c. Soit $x \in [a, b]$ fixé dans cette question. On suppose que $x > \alpha$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur le segment $[\alpha, x]$, démontrer que
   $$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{ML|x - \alpha|^2}{m^2}$$
   On admet que cette inégalité est encore vraie si $x \leqslant \alpha$.
   d. Conclure qu'il existe $K > 0$ tel que
   $$\forall x \in [a, b],\ |g(x) - \alpha| \leqslant K|x - \alpha|^2$$

Étude asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

6. Étudier les variations de g. Déterminer le(s) point(s) fixe(s) de g sur $[a, b]$. Vérifier que $g([a, \alpha]) \subset [a, \alpha]$. On suppose de plus que b est suffisamment petit pour que $g([a, b]) \subset [a, \alpha]$.
7. a. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et majorée par α.
   b. Déterminer les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   c. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.
8. Démontrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}\left(K|x_0 - \alpha|\right)^{2^n}.$$
   Quitte à modifier x_0, on peut supposer que $h = K|x_0 - \alpha| < 1$. Dans ce cas, $|x_n - \alpha| = \underset{n\to+\infty}{O}(h^{2^n})$, ce qui indique une convergence très rapide de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers α.