DS n°5 : Sujet 1 - Correction

Exercice 1 (Préliminaires /8)**.** Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$: /2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 11 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1$$

A est donc inversible, déterminons A^{-1} :

$$\iff \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -11 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$: /3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_3 \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow -3L_3 + L_2$$

B est donc inversible, déterminons B^{-1} :

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 21 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 7L_3 \end{array}$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}$$

On obtient donc $B^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -7 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier par le calcul que $BB^{-1} = I_3$.

Pour inverser C, on calcule $C^2 = 3I_3 + 2C$, donc $C^2 - 2C = C(C - 2I_3) = 3I_3$ donc C est inversible, d'inverse $C^{-1} = \frac{1}{3}(C - 2I_3)$. /3

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (/18)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

1. arccos est définie sur le domaine $D = [-1, 1]$. Comme cos est définie sur $\mathbb{R}$ entier, par composition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est définie sur D. /1
2. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$. /2
   De plus, la formule de linéarisation $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)\big)$ donne
   $$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).$$
   b. Soit $x \in D$. Comme $\cos(\arccos(x)) = x$, on a grâce à la question précédente : /2
   $$\begin{aligned} f_1(x) &= \cos(\arccos(x)) = x, \\ f_2(x) &= \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1, \\ f_3(x) &= \cos(3\arccos(x)) = 4\cos^3(\arccos(x)) - 3\cos(\arccos(x)) = 4x^3 - 3x. \end{aligned}$$

3. a. On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$. En particulier, si $x \in D$, on a /1

$$\cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos(\arccos(x)) = -x.$$

Comme $-x$ et $\cos(\pi - \arccos(x))$ sont dans D, on peut appliquer arccos pour obtenir l'égalité demandée : $\pi - \arccos(x) = \arccos(-x)$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in D$, $f_n(-x) = \cos(n\arccos(-x)) = \cos(n\pi - n\arccos(x))$ d'après la question précédente. /1

Si n est pair, comme la fonction cos est 2π périodique, on a donc

$$f_n(-x) = \cos(-n\arccos(x)) = \cos(n\arccos(x)))$$

par parité de cos, donc f_n est paire.

Si n est impair, $\cos(n\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ pour tout réel θ, et on a donc

$$f_n(-x) = -\cos(-n\arccos(x))) = -\cos(n\arccos(x)))$$

par parité de cos, donc f_n est impaire.

4. On utilise la formule de trigonométrie $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$. si $n \in \mathbb{N}^\star \forall x \in D$, /2

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) &= \cos\left((n+1)\arccos(x)\right) + \cos\left((n-1)\arccos(x)\right) \\ &= 2\cos\left(n\arccos(x)\right)\cos(\arccos(x)) \\ &= 2xf_n(x). \end{aligned}$$

Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$.

5. a. Comme cos est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ entier et arccos est de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, par composition f_n est de classe C^∞ sur $]-1,1[$. On calcule ses dérivées par composition puis produit : si $x \in]-1,1[$, /3

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= -n\arccos'(x)\sin(n\arccos(x)) = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos(x)), \\ f_n''(x) &= \frac{nx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(n\arccos(x)) - \frac{n^2}{1-x^2}\cos(n\arccos(x)). \end{aligned}$$

b. En utilisant ce qui précède, on obtient si $x \in]-1,1[$, /1

$$(1-x^2)f_n''(x) = \frac{nx}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos(x)) - \frac{n^2}{\cos}(n\arccos(x)) = xf_n'(x) - n^2 f_n(x),$$

ce qui correspond à l'égalité demandée.

6. a. On pose $u = \arccos(x)$, de sorte que $x = \cos(u)$ et $u \to 0^+$ quand $x \to 1^-$. On a alors /2

$$\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \frac{u}{\sqrt{1-\cos(u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u}{\sqrt{u^2/2}} \underset{u\to 0}{\to} \sqrt{2}.$$

On a donc montré que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$.

b. Étudions le taux d'accroissement de f_n en 1^- : si $x < 1$, $\dfrac{f_n(1) - f_n(x)}{1-x} = \dfrac{1-\cos(n\arccos(x))}{1-x}$ car $\cos(n\arccos(1)) = \cos(0) = 1$. /2

Or comme $\arccos(x) \to 0$ quand $x \to 1$, on a $1 - \cos(n\arccos(x)) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{2}(n\arccos(x))^2$. Donc

$$\frac{f_n(1) - f_n(x)}{1-x} = \frac{1-\cos(n\arccos(x))}{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\frac{1}{2}n^2\arccos^2(x)}{1-x} \underset{u\to 0}{\to} n^2$$

en utilisant la limite obtenue à la question précédente. Comme le taux d'accroissement de f_n en 1 admet une limite finie, on a donc montré que f_n est dérivable en 1, avec $f_n'(1) = n^2$.

Autre possibilité : on souhaiter appliquer le théorème "limite de la dérivée" à f_n. Montrons que $f_n'(x)$ admet une limite finie quand x tend vers 1 :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x) \\ &\underset{x\to1}{\sim} \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} n\arccos x \text{ car } \arccos x \to 0 \text{ quand } x \to 1 \text{ et } \sin u \underset{u\to0}{\sim} u \\ &= n^2\frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} \\ &\underset{x\to1}{\to} n^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \text{ en utilisant la question précédente} \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Comme f_n est continue sur $D = [-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et f_n' admet une limite finie en 1, f_n est donc dérivable en 1 d'après le théorème "limite de la dérivée", de dérivée $f_n'(1) = n^2$.

c. Comme f est paire ou impaire, son domaine de définition est symétrique par rapport à 0, donc f_n est dérivable en -1, avec $f_n'(-1) = -f_n'(1) = -n^2$ si n est pair (car dans ce cas f_n est paire d'après la question 3b, donc f_n' est impaire), et $f_n'(-1) = f_n'(1) = n^2$ si n est impair (car dans ce cas f_n est impaire, donc f_n' est paire). /1

Exercice 3 (/8). 1. Il y a 3 possibilités de résultat pour chacune des 48 courses. D'où 3^{48} grilles possibles. /1

2. L'évènement contraire est : "P. ne gagne aucune course". Or, les grilles telles que P. ne gagne aucune course sont celles qui ne comportent que des F ou des V. Il y en a 2^{48} (2 possibilités pour chaque case). Finalement, le nombre de grilles telles que P. gagne au moins une course est $3^{48} - 2^{48}$. /1
3. Pour créer une telle grille, on peut procéder selon les étapes suivantes : /2
   — On place les 10 P. dans la grille : $\binom{48}{10}$ possibilités.
   — On remplit le reste avec des F. et des V. Pour chacune des 38 cases restantes, 2 possibilités (F. ou V.), donc 2^{38} possibilités.

   Finalement, il y a $\binom{48}{10} \times 2^{38}$ grilles telles que P. a gagné exactement 10 courses.
4. Pour créer une telle grille, on peut procéder selon les étapes suivantes : /2
   — On place les 10 P. dans la grille : $\binom{48}{10}$ possibilités.
   — On place les 18 V. dans la grille : $\binom{48-10}{18} = \binom{38}{18}$ possibilités.
   — On remplit le reste avec des F. (aucun choix à faire).

   Finalement il y a $\binom{48}{10} \times \binom{38}{18}$ grilles telles que P. a gagné 10 courses et V. 18 courses.
5. On raisonne sur chaque coupe indépendamment des autres. Pour une coupe de 4 courses, il y a 3 cas possibles : /2
   - F. gagne 0 course : 2^4 possibilités (placement de P. ou V.)
   - F. gagne 1 course :
     — choix de la course gagnée par F. : 4 possibilités ;
     — remplissage des autres cases par V. ou P. : 2^3 possibilités.

     Donc 4×2^3 possibilités dans ce cas.
   - F. gagne 2 courses : $\binom{4}{2} \times 2^2$ possibilités.

   Donc pour une coupe, il y a $2^4 + 4.2^3 + \binom{4}{2}.2^2 = 72$ possibilités.
   Or, il y a 12 coupes indépendantes les unes des autres. Donc finalement, le nombre de grilles possibles respectant cette condition est 72^{12}.

Exercice 4 (/14). 1. a. Les calculs des produits matriciels donnent $L^2 = 3L$, $M^2 = 3M$, $ML = LM = 0_3$. /2

b. Notons pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathcal{P}(n)$:« $M^n = 3^{3-1}M$ ». /1

Pour $n = 1$, on a $M^1 = M$ et $3^{1-1}M = M$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \geqslant 1$. On a alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = 3^{n-1}M \times M = 3^{n-1}M^2 = 3^nM \quad \text{car } M^2 = 3M,$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ M^n = 3^{n-1}M.}$

La démonstration est identique pour la relation $L^n = 3^{n-1}L$ car on a aussi la relation $L^2 = 3L$.

c. À l'aide des coefficients en position 1,1 et 2,2 on trouve que $a = \frac{-1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$ sont les seules valeurs possibles puis on vérifie la relation $\boxed{A = \frac{-1}{3}L + \frac{2}{3}M.}$ /1

d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $A^n = (aL + bM)^n$ avec aL et bM deux matrices qui commutent d'après 1.(a) car $aL \times bM = (ab)LM = \mathbb{O}_3 = bM \times aL$. D'après le binôme de Newton, on a donc /1

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aL)^k (bM)^{n-k} = (bM)^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (aL)^k (bM)^{n-k} + (aL)^n \\ &= b^n 3^{n-1}M + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-l} 3^{n-2} \underbrace{ML}_{=\mathbb{O}_3} + a^n 3^{n-1} L \\ &= \frac{(-1)^n}{3}M + \frac{2^n}{3}L \end{aligned}$$

Remarque. On peut aussi démontrer le résultat par récurrence, mais affirmer que $(aL+bM)^n = (aL)^n + (bM)^n$ sans justification est insuffisant.

2. $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$. /1

3. a. Tout d'abord, pour $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, /2

$$Y = AY + U \Leftrightarrow Y - AY = U \Leftrightarrow I_3Y - AY = U \Leftrightarrow (I_3 - A)Y = U.$$

On résout la dernière équation, où $I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui revient à appliquer l'algorithme du pivot de la manière suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{\cdots}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, l'unique solution est $\boxed{Y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.}$

b. Notons $\mathcal{P}(n)$: « $X_n - Y = A^n(X_0 - Y)$ » pour tout $n \in \mathbb{N}$. /1

— Comme $A^0 = I_3$, on a $A^0(X_0 - Y) = X_0 - Y$ et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Ensuite, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$X_{n+1} - Y = AX_n + U - Y = A(X_n - Y) + \underbrace{AY + U - Y}_{=0} = A \times A^n(X_0 - Y) = A^{n+1}(X_0 - Y),$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que $\boxed{X_n - Y = A^n(X_0 - Y) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

4. a. On procède par récurrence. /2

— Pour $n = 1$, c'est vraie car $AX_0 + (\sum_{k=0}^{0} A^k)U = AX_0 + A^0U = AX_0 + U = X_1$ par déf de la suite (X_n).

— Supposons la formule vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$X_{n+1} = AX_n + U = A\Big(A^n X_0 + (\sum_{k=0}^{n-1} A^k)U\Big) + U = A^{n+1}X_0 + \Big(\sum_{k=0}^{n-1} A^{k+1}\Big)U + A^0U = A^{n+1}X_0 + \Big(\sum_{i=0}^{n+1} A^i\Big)U$$

ce qui montre la formule au range $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc montré le résultat pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On observe que $L + M = 3I_3$, de sorte que l'identité $A^k = \frac{1}{3}\left((-1)^k L + 2^k M\right)$ est également vérifiée pour $k = 0$. Ainsi si $n \in \mathbb{N}$, /1,5

$$S_n = \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\Big)L + \frac{1}{3}\Big(\sum_{k=0}^{n} 2^k\Big)M = \boxed{\frac{1-(-1)^{n+1}}{6}L + \frac{2^{n+1}-1}{3}M.}$$

5. D'après la question 1d, on a $A^7 = \frac{1}{3}(-L + 128M)$ ce qui donne : /1,5

$$A^7 = \begin{pmatrix} 42 & -43 & 43 \\ 0 & 128 & 0 \\ 86 & 43 & 85 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la question 3b, on obtient alors

$$X_7 = Y + A^7(X_0 - Y) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 & -43 & 43 \\ 0 & 128 & 0 \\ 86 & 43 & 85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 170 \\ -128 \\ 214 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 168 \\ -126 \\ 213 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 5 (/22). 1. Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc continue sur le segment $[a, b]$ et $f(a) > 0 > f(b)$ donc 0 est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. /2

De plus, par hypothèse, la fonction f est dérivable sur $[a, b]$ de dérivée strictement négative donc f est strictement monotone donc injective sur $[a, b]$. Par conséquent, 0 admet au plus un antécédent par f dans $[a, b]$.

On en déduit que α est l'unique antécédent de 0 par f dans $[a, b]$.

Enfin, si $\alpha = a$ alors $0 = f(\alpha) = f(a) > 0$: c'est une contradiction. Donc $\alpha \neq a$. Et si $\alpha = b$ alors $0 = f(\alpha) = f(b) < 0$: c'est une contradiction. Donc $\alpha \neq b$. Donc $\alpha \in]a, b[$.

On a démontré qu'il existe un unique $\alpha \in]a, b[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

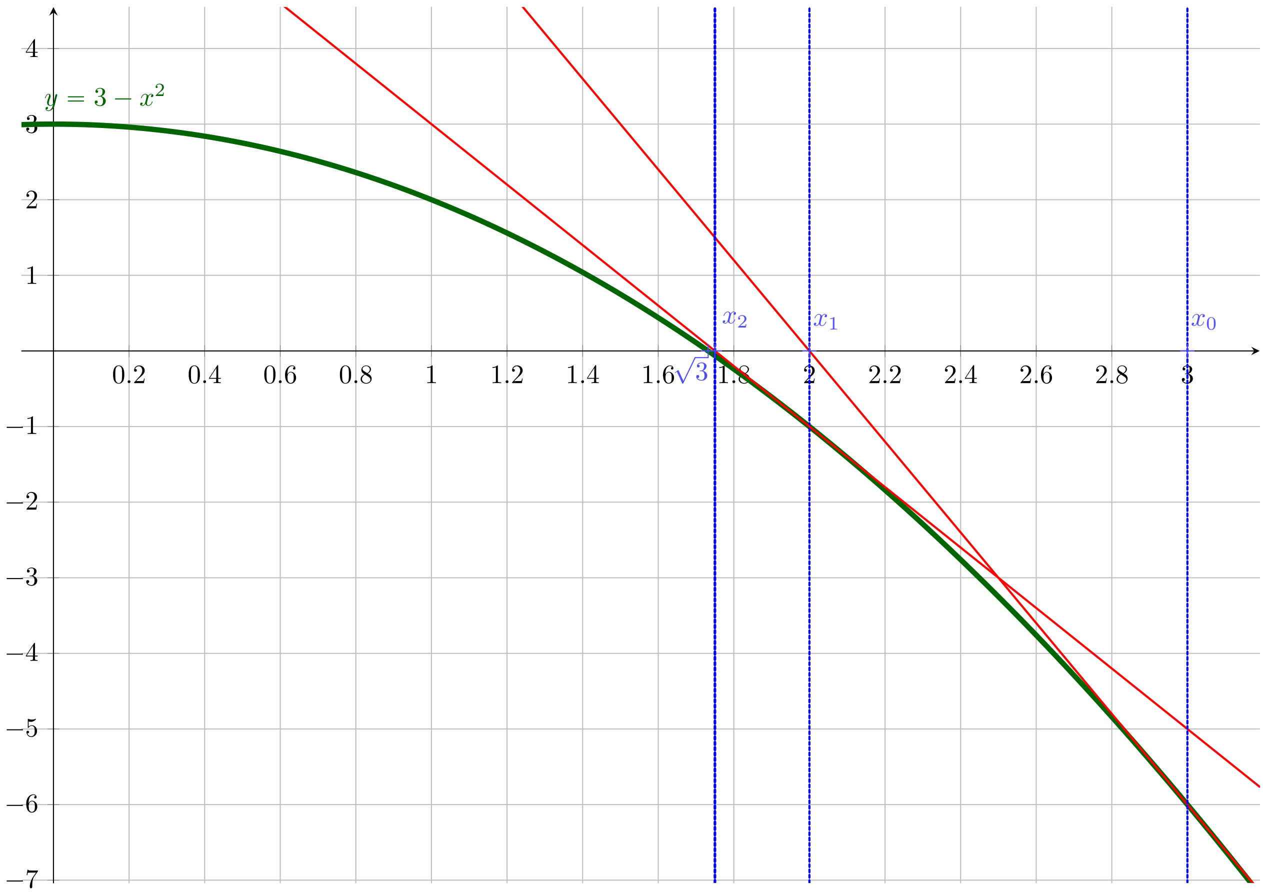
2. La tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 a pour équation cartésienne $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et l'axe des abscisses a pour équation cartésienne $y = 0$. /1

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc l'abscisse du point d'intersection de la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 et de l'axe des abscisses est $-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$.

3. On représente les trois premiers termes de (x_n) sur le graphe de $x \mapsto 3 - x^3$. Chaque x_n s'obtient comme intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe à l'abscisse x_{n-1}. On s'approche très rapidement de $\sqrt{3}$. /2



4. Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc a fortiori la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et la dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Par quotient puis différence avec la fonction identité qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, la fonction $g : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Et $\forall x \in [a,b]$, $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$. /3
Et comme $f(\alpha) = 0$, $g(\alpha) = \alpha$ et $g'(\alpha) = 0$.

5. a. On rappelle que la fonction valeur absolue $y \mapsto |y|$ est continue sur $\mathbb{R}$. /2
⋆ Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc f' est continue sur le segment $[a,b]$ et par composition avec la fonction valeur absolue, la fonction $t \mapsto |f'(t)|$ est continue sur le segment $[a,b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, cette fonction admet un minimum que l'on notera m. Donc $\forall t \in [a,b],\ |f'(t)| \geqslant m$. De plus, m étant un minimum, il existe $t_m \in [a,b]$ tel que $m = |f'(t_m)|$. Or, par hypothèse, la fonction f' ne s'annule pas, donc $m = |f'(t_m)| > 0$.
⋆ Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, f'' est continue sur le segment $[a,b]$ et est donc bornée sur le segment $[a,b]$, autrement dit il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall t \in [a,b],\ |f''(t)| \leqslant M$. Comme f'' n'est pas identiquement nul, M est strictement positif.

   b. Par hypothèse, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ donc f est dérivable sur $[a,b]$ et f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[a,b]$. Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f'(t)| \leqslant L$. De plus, d'après 5a, la fonction $t \mapsto |f'(t)|$ est à valeurs strictement positives sur $[a,b]$, donc par transitivité, $L > 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, /2

$$\forall t_1, t_2 \in [a,b],\ |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|$$

Et par conséquent, comme $\alpha \in [a,b]$ et que $f(\alpha) = 0$,

$$\forall t \in [a,b],\ |f(t)| \leqslant L|t - \alpha|$$

   c. Soit $t \in [\alpha, x] \subset [a,b]$. /2
D'après la question 4, $|g'(t)| = |\frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}| = \frac{|f''(x)||f(x)|}{|f'(x)|^2}$.

D'après 5a, $|f''(t)| \leqslant M$.
D'après 5a, $0 < m \leqslant |f'(t)|$ donc $0 < m^2 \leqslant |f'(t)|^2$ et donc $0 < \frac{1}{|f'(t)|^2} \leqslant \frac{1}{m^2}$.
D'après 5b, $|f(t)| \leqslant L|t-\alpha|$. De plus, $t \in [\alpha, x]$ donc $\alpha \leqslant t \leqslant x$ donc $0 \leqslant t-\alpha \leqslant x-\alpha$ donc $|t-\alpha| = t-\alpha \leqslant x-\alpha = |x-\alpha|$ et enfin comme $L > 0$, $|f(t)| \leqslant L|t-\alpha| \leqslant L|x-\alpha|$.
Par produit, on obtient que $|g'(t)| \leqslant \frac{ML|x-\alpha|}{m^2}$.
Cela démontre que $\forall t \in [\alpha, x]$, $|g'(t)| \leqslant \frac{ML|x-\alpha|}{m^2}$. De plus, la fonction g est dérivable sur $[\alpha, x]$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on obtient que

$$\forall t_1, t_2 \in [\alpha, x],\ |g(t_1) - g(t_2)| \leqslant \frac{ML|x-\alpha|}{m^2}|t_1 - t_2|$$

En particulier et parce que $x \in [\alpha, x]$, $\alpha \in [\alpha, x]$ et $g(\alpha) = \alpha$, on a

$$|g(x) - \alpha| \leqslant \frac{ML|x-\alpha|}{m^2}|x-\alpha|$$

d. En posant $K = \frac{ML}{m^2} > 0$, d'après la question précédente, on a /1

$$\forall x \in [a, b],\ |g(x) - \alpha| \leqslant K|x-\alpha|^2.$$

6. D'après la question 4, la fonction g est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $g'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2}$. Or, d'après l'énoncé, $\forall x \in [a, b]$, $f''(x) > 0$. De plus, $\forall x \in [a, b]$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[a, b]$ et s'annule en α. On en déduit que $\forall x \in [a, \alpha[$, $f(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha, b]$, $f(x) < 0$. Par conséquent, /2

$$\forall x \in [a, b],\ g'(x) = \frac{f''(x)f(x)}{(f'(x))^2} \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ si } x < \alpha \\ = 0 \text{ si } x = \alpha \\ < 0 \text{ si } x > \alpha \end{array}$$

Donc la fonction g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, b]$.
Si u est un point fixe de g, alors $f(u) = 0$. Comme f s'annule une seul fois sur $[a, b]$, g admet un unique point fixe, qui vaut α.
Par conséquent, comme g est croissante sur $[a, \alpha]$, $\forall x \in [a, \alpha]$, $g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(\alpha) = \alpha$, c'est-à-dire que $g([a, \alpha]) \subset [a, \alpha]$.

7. a. On va vérifier par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $H(n) =$ [le terme x_n est bien défini et $a \leqslant x_n \leqslant \alpha$] est vraie. /1
Initialisation : D'après l'énoncé, $x_0 \in [a, b]$ donc $x_1 = g(x_0)$ est bien défini et appartient à $[a, \alpha]$ donc $a \leqslant x_1 \leqslant \alpha$. Donc $H(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $H(n)$ est vraie. On a $x_n \in [a, \alpha] \subset [a, b]$ donc $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien défini et appartient à $[a, \alpha]$ donc $a \leqslant x_{n+1} \leqslant \alpha$. Donc $H(n+1)$ est vraie.
Conclusion : d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $H(n)$ est vraie.
De plus, d'après l'énoncé, le terme x_0 est bien défini, appartient à $[a, b]$ (mais peut-être pas à $[a, \alpha]$).
On en conclut que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, minorée par a et majorée par α à partir du rang 1.

b. On va vérifier par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $K(n) = [x_n \leqslant x_{n+1}]$ est vraie. /1
Initialisation : On a $x_1 = g(x_0) \in [a, \alpha]$. Donc $x_2 = g(x_1) = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Or, $x_1 \leqslant \alpha$ donc $f(x_1) \geqslant 0$ et $f'(x_1) < 0$. Donc $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \geqslant x_1$. Donc $K(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $K(n)$ est vraie c'est-à-dire que $x_n \leqslant x_{n+1}$. D'après la question précédente, on a $a \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \alpha$ et, comme d'après la question 6, g est croissante sur $[a, \alpha]$, $g(x_n) \leqslant g(x_{n+1})$ c'est-à-dire $x_{n+1} \leqslant x_{n+2}$. Donc $K(n+1)$ est vraie.
Conclusion : d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion $H(n)$ est vraie c'est-à-dire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

c. D'après les questions 7a et 7b, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante est majorée par α. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite $\ell \leqslant \alpha$. /1
On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ell$. D'une part, la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$. D'autre part, d'après 7a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a \leqslant x_n \leqslant \alpha$ donc d'après la propriété de passage à la limite dans les inégalités, $a \leqslant \ell \leqslant \alpha \leqslant b$ et comme g est continue sur $[a, b]$, elle est continue en ℓ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(\ell)$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = g(\ell)$. Par unicité de la limite, on conclut que $\ell = g(\ell)$. Donc $\ell \in [a, \alpha] \subset [a, b]$ et est un point fixe de g. D'après la question 6, $\ell = \alpha$.

8. On va vérifier par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'assertion $L(n) = [|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^n}]$ est vraie. /2
Initialisation : $\frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^0} = \frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^1 = |x_0 - \alpha| \geqslant |x_0 - \alpha|$. Donc $L(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $L(n)$ est vraie c'est-à-dire que $|x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$. D'après la question 5d, $|x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leqslant K|x_n - \alpha|^2$. Or $0 \leqslant |x_{n+1} - \alpha| = |g(x_n) - \alpha| \leqslant K|x_n - \alpha|^2$ donc $|x_n - \alpha|^2 \leqslant (\frac{1}{K}(K|x_0 - \alpha|)^{2^n})^2 = \frac{1}{K^2}(K|x_0 - \alpha|)^{2^{n+1}}$. Donc en multipliant par K, par transitivité, $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}|x_0 - \alpha|^{2^{n+1}}$.
Conclusion : d'après le théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, l'assertion $L(n)$ est vraie c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{K}(K(x_0 - \alpha))^{2^n}.$$