DS n°5 : Sujet 2

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont évaluées.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Ce sujet contient ***3 pages****.*
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Trois amies, P., V. et F., décident de s'affronter au jeu de course Mario Kart 8.
Le jeu comporte 48 courses, organisées en 12 coupes de 4 courses chacune. Les trois amies créent donc une grille de 48 cases, puis s'affrontent sur chacune des 48 courses. A chaque fin de course, elles notent dans la case correspondant à la course l'initiale de la gagnante de la course : P, V ou F. On s'intéresse à la grille à la fin de la compétition (qui est donc intégralement remplie).

1. Combien y a-t-il de grilles possibles ?
2. Sachant que P. a gagné au moins une course, combien y a-t-il de grilles possibles ?
   Conseil : considérer "l'évènement contraire" peut être utile.
3. Sachant que P. a gagné exactement 10 courses, combien y a-t-il de grilles possibles ?
4. Sachant que P. a gagné exactement 10 courses et V. exactement 18, combien y a-t-il de grilles possibles ?
5. Si la seule information que l'on a est que F. a gagné au plus 2 courses par coupe, combien y a-t-il de grilles possibles ?

Exercice 2. Comportement asymptotique de suite récurrente.

On considère une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$, de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\forall x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leqslant \lambda < 1$.

1. a. Montrer, en utilisant la continuité de f, qu'elle admet au moins un point fixe.
   b. Montrer, en utilisant l'hypothèse sur f', que ce point fixe est unique. On le note α.
   Indication : on pourra considérer deux points fixes α et β et étudier $f(\alpha) - f(\beta)$.
2. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \lambda |u_n - \alpha|$.
   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \lambda^n(b-a)$ et préciser la limite de (u_n).
3. On suppose de plus que $f'(\alpha) \neq 0$.
   a. Montrer qu'il existe une suite de réels $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad |c_k - \alpha| \leqslant \lambda^k (b-a) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \alpha = (u_0 - \alpha)\prod_{k=0}^{n-1} f'(c_k).$$
   Indication : utiliser l'égalité des accroissements finis pour définir chaque terme c_k.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$\frac{\prod_{k=0}^{n-1} f'(c_k)}{f'(\alpha)^n} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)\right) \qquad \text{avec } v_k = \frac{f'(c_k) - f'(\alpha)}{f'(\alpha)}$$
   c. Justifier que f'' est bornée sur $[a,b]$ puis qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|v_k| \leqslant M\lambda^k$.
   On admet que si (w_k) vérifie $w_k \underset{k\to\infty}{=} o(q^k)$ avec $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} w_k$ converge quand $n \to \infty$.
   d. En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $u_n - \alpha \underset{n\to\infty}{\sim} C f'(\alpha)^n$

Exercice 3. Matrices magiques et semi-magiques.

Si n est un entier naturel, on note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On note $m_{i,j}$ le coefficient sur la ligne i et la colonne j d'une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$.
On note Id la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$.
On appelle matrice semi-magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel, noté $\sigma(M)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M),\ \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sigma(M).$$

On note SM_n l'ensemble des matrices semi-magiques d'ordre n.
On appelle matrice magique d'ordre n, une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ ayant les propriétés suivantes : M est semi-magique et :

$$\sigma(M) = \mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \text{ et } \sigma(M) = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j}.$$

On note MG_n l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Montrer que M est semi-magique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MV = \lambda V = M^\top V$ où $V = (1\ 1\ \dots\ 1)^\top$
2. a. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(M,N) \in SM_n^2$ (respectivement MG_n^2) $\Rightarrow \alpha M + \beta N \in SM_n$ (resp. MG_n).
   b. Montrer que si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n alors MN est semi-magique.
3. On désigne par J la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $J_{i,j} = 1$.
   a. Montrer que J est magique.
   b. Montrer que $\forall p \geqslant 1$, $J^p = n^{p-1}J$.
4. Montrer que pour toute matrice semi-magique M de $M_n(\mathbb{R})$, on a $JM = \sigma(M)J = MJ$.
5. Dans cette question, on fixe $n = 3$.
   On se propose de montrer que si M est magique de MG_3, alors pour tout entier p impair, M^p est magique.
   On **admettra** que pour toute matrice de taille 3, il existe des coefficients $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $M^3 + aM^2 + bM + cI_3$ est la matrice nulle, avec le coefficient a qui est égal à la trace de M.
   a. Montrer que si $c \neq 0$, alors M est inversible.
   b. Soit M une matrice magique de trace nulle.
      i. Montrer que M n'est pas inversible, en utilisant ce qui précède.
      ii. En déduire l'existence d'un réel λ tel que $M^3 = \lambda M$.
      iii. Montrer que pour tout entier p impair, M^p est magique.
   c. Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(M)J$.
      i. Calculer M^p.
      ii. Montrer que pour tout entier impair M^p est magique.
6. Dans cette question, on fixe $n = 4$ et on considère la matrice magique d'ordre 4 de MG_4,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a. Vérifier que $A^2 = A + 2Id$.
   b. Montrer que pour tout $p \geqslant 2$, il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$.
   c. Démontrer que pour tout $p \geqslant 2$, A^p ne peut pas être magique.

———————————————————

Exercice 4. Fonctions à variation bornée.

Pour tous réels $a < b$, une *subdivision* de $[a, b]$ est une liste de réels du type $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, où n est un entier naturel supérieur à 2 quelconque, et $a = s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n = b$. On notera $\mathcal{S}(a, b)$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$. Pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a, b)$, on note $\ell(s)$ la longueur de s, de sorte qu'on a toujours :

$$\ell(s) \geqslant 2 \ , \quad s = (s_1, s_2, \ldots, s_{\ell(s)}) \ , \quad s_1 = a \text{ et } s_{\ell(s)} = b$$

Si f est une fonction réelle définie sur $[a, b]$ et $s \in \mathcal{S}(a, b)$, on appelle *variation de f selon s* et on note $v_f(s)$ le nombre :

$$v_f(s) = \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})|$$

Si l'ensemble

$$\mathcal{A}_f(a, b) = \{v_f(s) \ | \ s \in \mathcal{S}(a, b)\}$$

est majoré, on dit que f est à *variation bornée sur* $[a, b]$, et on définit la *variation de f sur* $[a, b]$ comme étant le nombre

$$V_f(a, b) = \sup (\mathcal{A}_f(a, b)) .$$

Le principal objectif de cet exercice est de montrer l'équivalence (E) suivante, pour tous réels $a < b$ et toute fonction réelle définie sur $[a, b]$:

$$f \text{ est à variation bornée sur } [a, b] \underset{(E)}{\iff} \left(\begin{array}{c} f \text{ est la somme d'une fonction croissante} \\ \text{et d'une fonction décroissante} \end{array} \right)$$

Dans toute la suite, on fixe $a < b$ deux réels.

1. **Sur les fonctions monotones.**
   a. Montrer qu'une fonction croissante sur $[a, b]$ est à variation bornée sur $[a, b]$, et déterminer ce que vaut sa variation sur $[a, b]$.
   b. Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante (sur $[a, b]$) est à variation bornée sur $[a, b]$.
2. **Sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.** Dans cette question, on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$.
   a. Justifier que f' est bornée sur $[a, b]$.
   b. En déduire que f est à variation bornée sur $[a, b]$.
3. **Preuve de l'équivalence** (E)**.** Soit f une fonction à variation bornée sur $[a, b]$.
   a. Justifier que de façon générale, si $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et M est un réel, on a l'équivalence :
   $$\sup(\mathcal{B}) \leqslant M \iff (\forall b \in \mathcal{B} \, , \ b \leqslant M)$$
   b. Montrer que f est à variation bornée sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$, et qu'on a :
   $$V_f(c, d) \leqslant V_f(a, b)$$
   c. Soit $x < y < z$ trois réels de $[a, b]$. Etablir la relation de Chasles : $V_f(x, z) = V_f(x, y) + V_f(y, z)$.
   On pourra, pour montrer l'égalité, démontrer séparément les inégalités $\leqslant$ et $\geqslant$, à l'aide de 3a.
   d. Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = V_f(a, x)$. Montrer que les fonctions g et $g - f$ sont toutes les deux croissantes.
   e. Conclure sur l'équivalence (E).
4. **Variation d'une fonction continue.** L'objectif de cette question est de montrer qu'une fonction continue sur un segment peut ne pas être à variation bornée sur ce segment. On pose pour cela la fonction f définie sur $[0, 1]$ par :
   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{array} \right.$$
   a. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
   b. On pose $u_n = \frac{1}{n\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   c. A l'aide d'une minoration simple, montrer : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \to_{n \to +\infty} +\infty$
   d. Conclure.