DS n°5 : Sujet 2 - Correction

Exercice 1. (/9)

1. Il y a 3 possibilités de résultat pour chacune des 48 courses. D'où 3^{48} grilles possibles. /1
2. L'évènement contraire est : "P. ne gagne aucune course". Or, les grilles telles que P. ne gagne aucune course sont celles qui ne comportent que des F ou des V. Il y en a 2^{48} (2 possibilités pour chaque case). Finalement, le nombre de grilles telles que P. gagne au moins une course est $3^{48} - 2^{48}$. /2
3. Pour créer une telle grille, on peut procéder selon les étapes suivantes : /2
   — On place les 10 P. dans la grille : $\binom{48}{10}$ possibilités.
   — On remplit le reste avec des F. et des V. Pour chacune des 38 cases restantes, 2 possibilités (F. ou V.), donc 2^{38} possibilités.

   Finalement, il y a $\binom{48}{10} \times 2^{38}$ grilles telles que P. a gagné exactement 10 courses.
4. Pour créer une telle grille, on peut procéder selon les étapes suivantes : /2
   — On place les 10 P. dans la grille : $\binom{48}{10}$ possibilités.
   — On place les 18 V. dans la grille : $\binom{48-10}{18} = \binom{38}{18}$ possibilités.
   — On remplit le reste avec des F. (aucun choix à faire).

   Finalement il y a $\binom{48}{10} \times \binom{38}{18}$ grilles telles que P. a gagné 10 courses et V. 18 courses.
5. On raisonne sur chaque coupe indépendamment des autres. Pour une coupe de 4 courses, il y a 3 cas possibles : /2
   - F. gagne 0 course : 2^4 possibilités (placement de P. ou V.)
   - F. gagne 1 course :
     — choix de la course gagnée par F. : 4 possibilités ;
     — remplissage des autres cases par V. ou P. : 2^3 possibilités.

     Donc 4×2^3 possibilités dans ce cas.
   - F. gagne 2 courses : $\binom{4}{2} \times 2^2$ possibilités.

   Donc pour une coupe, il y a $2^4 + 4.2^3 + \binom{4}{2}.2^2 = 72$ possibilités.
   Or, il y a 12 coupes indépendantes les unes des autres. Donc finalement, le nombre de grilles possibles respectant cette condition est 72^{12}.

Exercice 2. Comportement asymptotique de suite récurrente. (/14)

1. a. Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est continue sur $[a, b]$ par somme de fonctions continues, avec $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$, et $g(b) \leqslant 0$. /2
   Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ et donc il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

   b. Soient α et β deux points fixes de f. Comme f est dérivable sur $[a, b]$ avec $|f'|$ majorée par $\lambda < 1$, l'inégalité des accroissements finis donne /2
   $$|\alpha - \beta| = |f(\alpha) - f(\beta)| \leqslant \lambda|\alpha - \beta|$$
   Si $|\alpha - \beta| \neq 0$, cette inégalité impliquerait que $1 < \lambda$, ce qui est faux. Ainsi, on en déduit que $|\alpha - \beta| = 0$, c'est à dire $\alpha = \beta$. Conclusion : f admet un unique point fixe.
2. On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [a, b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a. Comme f laisse l'intervalle $[a, b]$ stable, on a par une récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$, puis en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et α /1
   $$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \lambda|u_n - \alpha|.$$

   b. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \lambda^n(b - a)$ ». /2

— u_0 et $\alpha \in [a,b]$, donc $|u_0-\alpha| \leqslant (b-a)$ ce qui montre que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \lambda|u_n-\alpha| \leqslant \lambda \times \lambda^n(b-a)$$

ce qui montre $\mathcal{P}_{n+1}$.

Par récurrence, on a donc montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leqslant \lambda^n(b-a)$.
Comme $\lambda^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 \leqslant \lambda < 1$, on en déduit par encadrement que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

3. a. Soit $k \in \mathbb{N}$. L'égalité des accroissements finis entre u_k et α affirme qu'il existe c_k entre u_k et α ($c_k \in [u_k,\alpha]$ ou $c_k \in [\alpha,u_k]$ selon l'ordre des bornes) tel que /2

$$\frac{u_{k+1}-\alpha}{u_k-\alpha} = \frac{f(u_k)-f(\alpha)}{u_k-\alpha} = f'(c_k).$$

Comme c_k est dans $[u_k,\alpha]$ ou $[\alpha,u_k]$, on a $|c_k-\alpha| \leqslant |u_k-\alpha| \leqslant \lambda^k(b-a)$.
Et de plus, avec la suite (c_k) définie ci-dessus, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$\prod_{k=0}^{n-1} f'(c_k) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_{k+1}-\alpha}{u_k-\alpha} = \frac{u_n-\alpha}{u_0-\alpha} \qquad \text{par produit télescopique,}$$

ce qui montre le résultat voulu.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, /1

$$\frac{\prod_{k=0}^{n-1} f'(c_k)}{f'(\alpha)^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{f'(c_k)}{f'(\alpha)} = \prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{f'(c_k)-f'(\alpha)}{f'(\alpha)}\right) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\ln(1+v_k)\right).$$

Remarque : en toute rigueur, il pourrait y avoir un problème si $1+v_k \leqslant 0$. Mais comme $v_k \to 0$, on est sûr qu'au moins à partir d'un certain rang, $1+v_k > 0$. Il faudrait donc séparer le produit en deux, pour que la somme dans l'exponentielle ne commence qu'à partir de ce rang, mais cela ne change rien à la suite du raisonnement.

c. La fonction f'' est continue sur le segment $[a,b]$ (car f est $\mathcal{C}^2$) donc f'' y est bornée. Notons $A = \sup_{[a,b]}|f''|$. L'inégalité des accroissements finis, appliquée à f' qui est dérivable sur $[a,b]$, montre que pour $k \in \mathbb{N}$, $|f'(c_k)-f'(\alpha)| \leqslant A|c_k-\alpha| \leqslant A(b-a)\lambda^k$, et donc $|v_k| \leqslant \frac{A(b-a)}{f'(\alpha)}\lambda^k$. /2

d. Comme $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\ln(1+v_k) \sim v_k$, et pour $q = \frac{1+\lambda}{2}$ (qui vérifie $\lambda < q < 1$), on a $\frac{|v_k|}{q^k} \leqslant M(\frac{\lambda}{q})^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $v_k = o(q^k)$ ce qui prouve finalement que $\ln(1+v_k) = o(q^k)$. /2

En appliquant le résultat admis, on en déduit donc qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \ln(1+v_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Ainsi $\frac{\prod_{k=0}^{n-1} f'(c_k)}{f'(\alpha)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(\ell)$ par continuité de l'exponentielle et donc

$$u_n-\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} (u_0-\alpha)e^{\ell} f'(\alpha)^n = Cf'(\alpha)^n.$$

Exercice 3. Matrices magiques et semi-magiques. (/18)

1. Si M est une matrice de taille n, alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $MV = M\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ a pour i-ème coefficient $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}$, et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $M^\top V = M^\top\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ a pour i-ème coefficient $\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}$. /2

On obtient donc l'équivalence demandée :

— si $MV = M^\top V = \lambda V$, cela veut dire que tous ces coefficients sont les mêmes, et donc que pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^n m_{k,i} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} = \lambda$, autrement dit M est semi-magique avec $\sigma(M) = \lambda$.

— réciproquement, si M est semi-magique, on en déduit que tous les coefficients de MV et $M^\top V$ sont égaux à $\sigma(M)$, et donc $MV = M^\top V = \lambda M$ avec $\lambda = \sigma(M)$.

2. a. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et des matrices semi-magiques $(M, N) \in SM_n^2$, avec les constantes associées $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$. /2

Alors si on note respectivement $m_{i,j}$, $n_{i,j}$ et $c_{i,j}$ les coefficients des matrices M, N et $\alpha M + \beta N$, on a pour tout i dans $[\![1,n]\!]$:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = \sum_{j=1}^n \alpha m_{i,j} + \sum_{j=1}^n \beta n_{i,j} = \alpha \sum_{j=1}^n m_{i,j} + \beta \sum_{j=1}^n n_{i,j} = \alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N).$$

De même pour tout j dans $[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^n c_{i,j} = \sum_{i=1}^n \alpha m_{i,j} + \sum_{i=1}^n \beta n_{i,j} = \alpha \sum_{i=1}^n m_{i,j} + \beta \sum_{i=1}^n n_{i,j} = \alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N).$$

La matrice $\alpha M + \beta N$ est donc semi-magique, avec la constante $\sigma(\alpha M + \beta N) = \alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N)$.
Si M et N sont de plus magiques, alors

$$\sigma(\alpha M + \beta N) = \operatorname{tr}(\alpha M + \beta N) = \alpha \operatorname{tr}(M) + \beta \operatorname{tr}(N) = \alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N),$$

et

$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} c_{i,j} = \alpha \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} m_{i,j} + \beta \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} n_{i,j} = \alpha\sigma(M) + \beta\sigma(N),$$

donc $\alpha M + \beta N \in SM_n$ est magique en plus d'être semi-magique.

b. On utilise la caractérisation de la question 1. Si M et N sont des matrices semi-magiques d'ordre n, il existe λ et μ des réels tels que $MV = \lambda V = M^\top V$ où $V = (1\ 1\ \ldots\ 1)^\top$ et $NV = \mu V = N^\top V$. Alors $MNV = M(\mu V) = \mu MV = \mu\lambda V$ et $(MN)^\top V = N^\top M^\top V = N^\top(\lambda V) = \lambda N^\top V = \lambda\mu V$ donc MN est semi-magique puisque $\nu = \lambda\mu = \mu\lambda$ est un réel tel que $MNV = \nu V = (MN)^\top V$. /1

3. On désigne par J la matrice à coefficients réels telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $J_{i,j} = 1$.

a. Notons que $J = J^\top$, puis $JV = J^\top V = nV$, donc J est semi-magique d'après la question 1, avec la constante $\sigma(J) = n$. De plus $\operatorname{tr} J = n$ et $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} J_{i,j} = \sum_{i,j\in[\![1,n]\!], i+j=n+1} 1 = n$, donc J est une matrice magique. /1

b. On montre par récurrence que $\forall p \geqslant 1$, $J^p = n^{p-1}J$. /2
<u>Initialisation :</u> c'est vrai pour $p = 1$: $J^1 = n^0 J$.
<u>Hérédité :</u> on suppose que pour un certain $p \geqslant 1$, $J^p = n^{p-1}J$. Alors $J^{p+1} = J^p J = n^{p-1}J^2$ d'après l'hypothèse de récurrence. Or $J^2 = nJ$ donc $J^{p+1} = n^p J$.
<u>Conclusion :</u> on a montré par récurrence que pour tout $p \geqslant 1$, $J^p = n^{p-1}J$.

4. Soit M une matrice semi-magique de $M_n(\mathbb{R})$. Comme $\sigma(M)J$ est la matrice avec tous ses coefficients égaux à $sigma(M)$, il suffit de montrer que les coefficients des produits JM et MJ sont tous égaux à $\sigma(M)$. Calculons : si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, /1

$$(JM)_{i,j} = \sum_{k=1}^n \underbrace{J_{i,k}}_{=1} M_{k,j} = \sum_{k=1}^n M_{k,j} = \sigma(M) \quad \text{et} \quad (MJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^n M_{i,k} \underbrace{J_{k,j}}_{=1} = \sum_{k=1}^n M_{i,k} = \sigma(M).$$

Donc $JM = \sigma(M)J = MJ$.

5. a. Si $c \neq 0$, alors $M(M^2 + aM + bI_3) = cI_3$ donc M est inversible avec $M^{-1} = \frac{1}{c}(M^2 + aM + bI_3)$. /1

b. Soit M une matrice magique de trace nulle.

i. Comme M est une matrice magique de trace nulle, alors $\sigma(M) = \operatorname{tr}(M) = 0$. Donc en particulier, d'après la question 4, $MJ = \sigma(M)J = 0_3$ puisque M est semi-magique. Alors M ne peut pas être inversible (sinon en multipliant par l'inverse de M on obtiendrait $J = 0_3$ ce qui est impossible). /1

ii. D'après la question 5a, comme M n'est pas inversible, on a forcément $c = 0$. Comme le coefficient a est égal à la trace de M, on a également $a = 0$. On a donc $M^3 + bM$ qui est égal à la matrice nulle, autrement dit $M^3 = \lambda M$ avec le réel $\lambda = -b$. /1

iii. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $M^{2k+1} = \lambda^k M$. /1
<u>Initialisation :</u> on vient de le montrer pour $k = 1$.
<u>Hérédité :</u> on suppose la propriété vérifiée pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} M^{2(k+1)+1} = M^{2k+3} = M^{2k}M^3 &= \lambda M^{2k+1} \quad \text{car } M^3 = \lambda M \\ &= \lambda\lambda^k M \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u> pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^{2k+1} = \lambda^k M$. Or on a vu dans la question 2a que si M est magique, alors αM est magique pour tout réel α. Comme toutes les puissances impaires de M sont des multiples de M, elles sont toutes magiques.

c. Soit M une matrice magique de MG_3. On pose $M_0 = M - \frac{1}{3}\operatorname{tr}(M)J$.

i. Notons que M_0 est encore une matrice magique, comme combinaison linéaire de deux matrices magiques (question 2a), et que de plus sa trace est nulle (car $\operatorname{tr}(J) = 3$), donc $\sigma(M_0) = 0$. Donc M_0 et J commutent (d'après la question 4), et on peut utiliser le binôme de Newton pour déterminer M^p : /1

$$M^p = \left(M_0 + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(M)J\right)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}M_0^{p-k}\left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}(M)J\right)^p = M_0^p + \left(\frac{1}{3}\operatorname{tr}(M)J\right)^p,$$

car tous les termes croisés s'annulent, puisque $M_0J = \sigma(M_0)J = 0_3$ (question 4). En utilisant que $J^p = 3^{p-1}J$, on obtient finalement $M^p = M_0^p + 3^{p-2}\left(\operatorname{tr}(M)\right)^p J$.

ii. Si p est impair, comme M_0 est magique et de trace nulle, M_0^p est magique d'après la question 5b. Donc si p est impair, on a écrit dans la question précédente M^p comme combinaison linéaire de M_0^p et de J qui sont toutes les deux magiques, donc M^p est magique (question 2a). /1

6. a. On vérifie par le calcul que $A^2 = A + 2Id$. /0,5

b. On vérifie par récurrence que pour tout entier $p \geqslant 2$, il existe deux entiers <u>strictement</u> positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$. /1,5
<u>Initialisation :</u> on vient de le vérifier pour $p = 2$.
<u>Hérédité :</u> supposons la propriété est vérifiée pour un certain $p \geqslant 2$: il existe deux entiers positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$. Alors $A^{p+1} = a_pA^2 + b_pA = a_p(A + 2I_d) + b_pA = (a_p + b_p)A + 2a_pId$. Comme $a_p + b_p$ et $2a_p$ sont bien des entiers strictement positifs, la propriété est donc vérifiée au rang $p+1$. <u>Conclusion :</u> pour tout $p \geqslant 2$, il existe deux entiers strictement positifs a_p et b_p tels que $A^p = a_pA + b_pId$.

c. Soit $p \geqslant 2$. Raisonnons par l'absurde : si A^p est magique, alors $Id = \frac{1}{b_p}(A^p - a_pA)$ est aussi magique comme combinaison linéaire des deux matrices magiques A et A^p (d'après la question 2a). Or Id n'est pas magique car la somme de ses termes diagonaux est égale à 4, alors que la somme des coefficients d'une de ses lignes ou colonnes est égale à 1 (et la somme de son antédiagonale est nulle). On obtient une contradiction, ce qui démontre que pour tout $p \geqslant 2$, A^p ne peut pas être magique. /1

Exercice 4. Fonctions à variation bornée. (/20)

1. **Sur les fonctions monotones.**

a. Soit f une fonction croissante sur $[a, b]$. Soit $s \in \mathcal{S}(a, b)$. On a : /2

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)}|f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} f(s_i) - f(s_{i-1}) \qquad \text{(car pour tout } i,\ f(s_i) \geqslant f(s_{i-1}) \text{, par croissance)} \\ &= f(s_{\ell(s)}) - f(s_1) \qquad \text{(par télescopage)} \\ &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est l'ensemble à un seul élément : $\mathcal{A}_f(a,b) = \{f(b) - f(a)\}$. Il est donc bien majoré (f est donc à variation bornée), et sa borne supérieure vaut :

$$\boxed{V_f(a,b) = f(b) - f(a)}$$

b. Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ de la forme $f = g - h$, où g et h sont deux fonctions croissantes sur $[a,b]$. On a alors pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$: /2

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |\big(g(s_i) - g(s_{i-1})\big) - \big(h(s_i) - h(s_{i-1})\big)| \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} |g(s_i) - g(s_{i-1})| + \sum_{i=2}^{\ell(s)} |h(s_i) - h(s_{i-1})| \qquad \text{(ineg. triang. et lin. de la somme)} \\ &\leqslant g(b) - g(a) + h(b) - h(a) \qquad \text{(question précédente)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

2. **Sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

a. $f \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$ donc par définition, f' est continue sur $[a,b]$, qui est un segment de $\mathbb{R}$. Donc par le théorème des bornes atteintes, f' est bornée sur $[a,b]$. /0,5

b. Voici deux méthodes possibles. /1,5

- **Méthode 1.** Soit $M \geqslant 0$ un majorant de $|f'|$. Par l'inégalité des accroissements finis, on sait que f est M-lispschitzienne sur $[a,b]$. Donc pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} M|s_i - s_{i-1}| \qquad \text{(f est M-lispschitzienne)} \\ &\leqslant M \sum_{i=2}^{\ell(s)} s_i - s_{i-1} \qquad \text{(pour tout i, $s_i \geqslant s_{i-1}$)} \\ &\leqslant M(b-a) \qquad \text{(par télescopage)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

- **Méthode 2.** Pour tout $s \in \mathcal{S}(a,b)$:

$$\begin{aligned} v_f(s) &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\ &= \sum_{i=2}^{\ell(s)} \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} f'(t)dt \right| \qquad \text{(formule du crochet)} \\ &\leqslant \sum_{i=2}^{\ell(s)} \int_{s_{i-1}}^{s_i} |f'(t)|dt \qquad \text{(ineg. triangulaire)} \\ &\leqslant \int_a^b |f'(t)|dt \qquad \text{(relation de Chasles)} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(a,b)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(a,b)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$.

3. **Preuve de l'équivalence** (E).

a. Fixons $\mathcal{B}$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée et $M \in \mathbb{R}$. /1

L'implication $(\Rightarrow)$ est claire, car si $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$, alors pour tout $b \in \mathcal{B}$ on a :

$$b \leqslant \sup(\mathcal{B}) \leqslant M$$

Réciproquement, supposons que pour tout $b \in \mathcal{B}$, $b \leqslant M$. Alors M est un majorant de $\mathcal{B}$. Or, $\sup(\mathcal{B})$ est par définition le plus petit des majorants de $\mathcal{B}$. Donc $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$.
L'équivalence est montrée.

Remarque : pour la réciproque, on pouvait aussi utiliser le fait qu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sup(\mathcal{B})$. Dans ce cas, le passage à la limite $n \to +\infty$ dans l'inégalité large $b_n \leqslant M$ donne $\sup(\mathcal{B}) \leqslant M$.

b. Soit c, d deux réels tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$. Soit $s \in \mathcal{S}(c,d)$ une subdivision de $[c,d]$. Notons $n := \ell(s)$, de sorte que $s = (c = s_1, \ldots, s_n = d)$. Formons alors une subdivision t de $\mathcal{S}(a,b)$ de la façon suivante : /2

- $t_1 := a$
- $t_2 := s_1$, $t_3 := s_2$, etc jusqu'à $t_{n+1} := s_n$, ou autrement dit pour tout $i \in \{2, n+1\}$, $t_i := s_{i-1}$
- $t_{n+2} := b$

On a alors :

$$\begin{aligned}
v_f(s) &= \sum_{i=2}^{n} |f(s_i) - f(s_{i-1})| \\
&= \sum_{k=3}^{n+1} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \qquad \text{(chgt d'indice } k = i+1\text{)} \\
&\leqslant \sum_{k=2}^{n+2} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \qquad \text{(rajout de 2 termes positifs)} \\
&\leqslant v_f(t) \\
&\leqslant V_f(a,b)
\end{aligned}$$

Cette majoration (par une constante) étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(c,d)$, cela prouve que l'ensemble $\mathcal{A}_f(c,d)$ est majoré. Donc f est à variation bornée sur $[c,d]$.

De plus, puisque tous les éléments de $\mathcal{A}_f(c,d)$ sont inférieurs au réel $V_f(a,b)$, on a par la question précédente que la borne supérieure de $\mathcal{A}_f(c,d)$ est elle-même inférieure à $V_f(a,b)$. Autrement dit : $V_f(c,d) \leqslant V_f(a,b)$.

c. /3

- Montrons l'inégalité $V_f(x,z) \leqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)$.
  Soit $s \in \mathcal{S}(x,z)$, mettons $s = (s_1, \ldots, s_n)$, avec $s_1 = x$ et $s_n = z$. Comme $y \in]x,z[$, il existe un indice $p \in \{1, n\}$ tel que $s_{p-1} \leqslant y \leqslant s_p$. On pose alors deux subdivisions :

$$t = (s_1, \ldots, s_{p-1}, y) \in \mathcal{S}(x,y)$$

et

$$u = (y, s_p, \ldots, s_n) \in \mathcal{S}(y,z)$$

A la jonction des deux subdivisions, on a par inégalité triangulaire :

$$|f(s_p) - f(s_{p-1})| \leqslant |f(s_p) - f(y)| + |f(y) - f(s_{p-1})|$$

Donc en ajoutant de part et d'autre de l'inégalité les termes $|f(s_i) - f(s_{i-1})|$ pour $i \in \{2, n\} \setminus \{p\}$, on obtient :

$$v_f(s) \leqslant v_f(t) + v_f(u)$$

Or, $v_f(t) \leqslant V_f(x,y)$ et $v_f(u) \leqslant V_f(y,z)$. Donc :

$$v_f(s) \leqslant V_f(x,y) + V_f(y,z)$$

Cette inégalité étant vraie pour toute subdivision $s \in \mathcal{S}(x,z)$, cela montre que tous les éléments de $\mathcal{A}_f(x,z)$ sont inférieurs au réel $V_f(x,y)+V_f(y,z)$. Par la question a., le sup de cet ensemble $\mathcal{A}_f(x,z)$ est donc lui-même inférieur à $V_f(x,y)+V_f(y,z)$. D'où :

$$\boxed{V_f(x,z) \leqslant V_f(x,y)+V_f(y,z)}$$

- Montrons l'inégalité $V_f(x,z) \geqslant V_f(x,y)+V_f(y,z)$.
  Soit $t \in \mathcal{S}(x,y)$, mettons $t=(t_1,\dots,t_n)$, et $u \in \mathcal{S}(y,z)$, mettons $u=(u_1,\dots,u_m)$. Posons :

  $$s := (t_1,\dots,t_n,u_1,\dots,u_m)$$

  Il s'agit d'une subdivision de $[x,z]$. De plus :

  $$v_f(s)=v_f(t)+v_f(u)$$

  car à la jonction, le terme $|f(u_1)-f(t_n)|$ est nul (il s'agit de $|f(y)-f(y)|$). D'où :

  $$v_f(t)+v_f(u) \leqslant V_f(x,z)$$

  Or, en fixant u et en constatant que cette inégalité, qui peut être ré-écrite ainsi,

  $$v_f(t) \leqslant V_f(x,z)-v_f(u)$$

  est vraie pour toute subdivision $t \in \mathcal{S}(x,y)$, on a par la question a. :

  $$V_f(x,y) \leqslant V_f(x,z)-v_f(u)$$

  Puis en écrivant cette même inégalité sous la forme

  $$v_f(u) \leqslant V_f(x,z)-V_f(x,y)$$

  et en constatant qu'elle est vraie pour toute subdivision $u \in \mathcal{S}(y,z)$, on a par la question a. :

  $$V_f(y,z) \leqslant V_f(x,z)-V_f(x,y)$$

  D'où finalement : $\boxed{V_f(x,z) \geqslant V_f(x,y)+V_f(y,z)}$.

Finalement, les deux inégalités encadrées montrent bien la relation de Chasles voulue.

d. Montrons que g est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. Par la relation de Chasles : /2

$$g(y)=g(x)+V_f(x,y)$$

Or, $V_f(x,y) \geqslant 0$, car il s'agit du sup d'un ensemble de réels positifs. Donc $g(y) \geqslant g(x)$.
On a bien montré que g est croissante.

Montrons maintenant que $g-f$ est croissante. Soit $x \leqslant y$ deux réels de $[a,b]$. On a :

$$\begin{aligned}(g-f)(y)-(g-f)(x) &= \big(g(y)-g(x)\big)-\big(f(y)-f(x)\big)\\ &= V_f(x,y)-\big(f(y)-f(x)\big)\end{aligned}$$

Or, la quantité $|f(y)-f(x)|$ est la variation de f selon la subdivision à deux points $s:=(x,y)$ (subdivision de $[x,y]$). Donc par définition de $V_f(x,y)$, on a $|f(y)-f(x)| \leqslant V_f(x,y)$ et donc en particulier $f(y)-f(x) \leqslant V_f(x,y)$. D'où :

$$(g-f)(y)-(g-f)(x) \geqslant 0$$

Ce travail montre que $g-f$ est croissante.

e. On écrit alors /1

$$f = \underbrace{g}_{\text{croissante}} + \underbrace{(f-g)}_{\text{décroissante}}$$

ce qui prouve que f est la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante.
Ce travail étant valable pour toute fonction à variation bornée sur $[a,b]$, on a montré l'implication $(\Rightarrow)$ de l'équivalence (E).
L'implication $(\Leftarrow)$ a été démontrée à la question b.. L'équivalence (E) est donc bien démontrée.

4. **Variation d'une fonction continue.**

a. f est continue sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions continues. Reste à montrer la continuité en 0. Or : /1

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{x} \underset{x\to 0}{\to} 0$$

Donc par encadrement, $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$, et 0 est bien la valeur de $f(0)$. f est donc aussi continue en 0.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{2, n\}$: /2

$$f(u_k) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|f(u_k) - f(u_{k-1})| &= |\frac{(-1)^k}{\sqrt{k\pi}} - \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{(k-1)\pi}}| \\
&= \underbrace{|(-1)^k|}_{=1} \times |\frac{1}{\sqrt{k\pi}} + \frac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}}| \\
&= \frac{1}{\sqrt{k\pi}} + \frac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \\
&\geqslant \frac{2}{\sqrt{k\pi}} \qquad \left(\text{car } \frac{1}{\sqrt{(k-1)\pi}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right)
\end{aligned}$$

D'où, en sommant ces inégalités sur $k \in \{2, n\}$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| \geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

c. Pour tout $k \in \{2, n\}$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par sommation : /1

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = (n-1) \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Or, $\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc par minoration, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

d. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Posons la subdivision de $[0,1]$ suivante : /1

$$s^{(n)} := (0, u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1, 1)$$

On a

$$\begin{aligned}
v_f(s^{(n)}) &= \underbrace{|f(u_n) - f(0)|}_{\geqslant 0} + \sum_{k=2}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| + \underbrace{|f(u_1) - f(1)|}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \sum_{k=2}^{n} |f(u_k) - f(u_{k-1})| \\
&\geqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, on a par minoration $v_f(s^{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Cela montre que l'ensemble $\mathcal{A}_f(0,1)$ n'est pas majoré, et donc que f n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.