DS n°6

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont évaluées.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
*Ce sujet contient **3 pages**.*
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. 1. Déterminer un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $a_n = \ln(3 \cdot 2^n + n^4)$ et de $b_n = \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$.

2. Déterminer un équivalent en 0 de la fonction $\delta : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\sqrt{4+x}-2}$.
   Sans plus de calcul, δ est-elle prolongeable par continuité, et dérivable en 0 ?
   Si oui, donner sa valeur en zéro et sa dérivée.

Exercice 2. On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire, ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires. On effectue une suite de tirages dans ces urnes en procédant comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U,
- tous les tirages s'effectuent avec remise de la boule piochée dans l'urne dont elle provient,
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant à lieu dans l'autre urne,
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant à lieu dans la même urne.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note U_n l'évènement « le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U ».

1. Déterminer $P(U_1)$ et $P(U_2)$.
2. Donner les valeurs de $P_{U_2}(U_3)$ et de $P_{\overline{U_2}}(U_3)$, et en déduire $P(U_3)$.
3. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $u_n = P(U_n)$.
   a. Soit $n \geqslant 2$. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que : $u_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}u_n$.
   b. En déduire u_n en fonction de n et préciser sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 3.

Préliminaire. Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note M la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}_3[X]$ unitaire tel que $P(M) = 0_3$ (on dit alors que P est un *polynôme annulateur* de M).
   Indice. On pourra comparer les premières colonnes des matrices I_3, M, M^2 et M^3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. À l'aide de la division euclidienne de X^n par P, démontrer qu'il existe des nombres réels α, β, γ tels que $M^n = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I_3$.
   Remarque. On ne demande pas à ce stade d'expression explicite de α, β et γ.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à déplacer n fois un pion sur un plateau de trois cases (notées A, B et C) selon les règles suivantes :

- si le pion est en A on le déplace sur la case B,
- s'il est en B on le déplace sur la case C,
- s'il est en C on le déplace sur la case A avec probabilité p_A, et sur la case B avec probabilité p_B (on a donc $p_A + p_B \leqslant 1$, et rester en C compte comme un déplacement),
- le pion commence en A.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note A_k (respectivement B_k, C_k) l'événement "le pion est sur la case A (respectivement B, C) après k déplacements" et $p_k = \mathbb{P}(A_k)$, $q_k = \mathbb{P}(B_k)$, $r_k = \mathbb{P}(C_k)$ leurs probabilités.

3. Représenter schématiquement l'expérience aléatoire (les états possibles et les probabilités de transition).

4. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, exprimer $p_{k+1}, q_{k+1}, r_{k+1}$ en fonction de p_k, q_k, r_k puis déterminer des réels a, b, c indépendants de k tel que
$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix},$$
avec M la matrice étudiée dans le préliminaire.

5. En déduire une expression de p_n, q_n et r_n en fonction des α, β et γ introduits dans le préliminaire.

6. On suppose maintenant que $p_A = p_B = \frac{1}{2}$.
   a. Écrire la matrice M et le polynôme annulateur P correspondant à ces valeurs de p_A et p_B.
   b. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$ avec leur multiplicité.
   c. En déduire un système linéaire dont (α, β, γ) est solution puis exprimer α, β et γ en fonction de n.
   Indication. On pourra transformer le système linéaire en système à coefficients réels avant de le résoudre.
   d. Quelles vérifications peut-on faire sur ce résultat final ?

7. Même question avec $p_A = \frac{1}{9}$ et $p_B = \frac{5}{9}$.

Exercice 4 (Développement asymptotique de la distance à un graphe)**.**

Deux DL pour s'échauffer.

1. Déterminer un $DL_4(0)$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ (ou plutôt de son prolongement continu en 0) et un $DL_6(0)$ de $x \mapsto \ln(\cos x)$.

Remarque. Ces DL seront utiles dans la suite, mais pas forcément à cette précision.

Distance (au carré) à un graphe.

2. Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. On définit $\Delta(f) = \inf\left\{x^2 + f(x)^2 \,;\, x \in \mathbb{R}\right\}$.
   a. Montrer que $\Delta(f)$ est bien défini, et montrer l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que
   $$x_n^2 + f(x_n)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Delta(f).$$
   b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée.
   On <u>admettra</u> que cela implique l'existence d'un réel a tel que $\Delta(f) = a^2 + f(a)^2$.
   c. Montrer l'égalité $f(a)\, f'(a) = -a$.

Dans toute la suite du problème, étant donné $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère $f_n : x \mapsto \cos^n x$, définie sur $\mathbb{R}$. On note alors $\delta_n = \Delta(f_n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

   a. Montrer l'existence de $a_n \in [0,1]$ tel que $\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n}(a_n)$.

   b. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. a. Montrer que pour n suffisamment grand, $\ln n = -\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) - (2n-1)\ln(\cos a_n)$.

   b. En déduire $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

5. a. Montrer que $\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$ et $\ln(\cos a_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$.

   b. À l'aide de la relation obtenue à la question 4.a., montrer que $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.
   Indication. On pourra introduire la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, a_n^2 = \frac{\ln n}{n} + b_n$.

   c. En déduire un développement asymptotique de $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ à la précision $o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est d'établir des conditions nécessaires pour qu'un polynôme soit scindé dans $\mathbb{R}$, qui généralisent celle connue pour les polynômes de degré 2.
Rappel : un polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$ si la somme des multiplicités de ses racines réelles est égale à son degré, ce qui revient à dire que le polynôme se factorise en un produit de polynômes à coefficients réels de degré 1.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est également scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que si α est racine de P de multiplicité $m \geqslant 2$, alors α est racine de P' de multiplicité $m-1$.

3. En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' l'est aussi.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme à coefficients réels de degré 2 soit scindé sur $\mathbb{R}$ et en déduire une condition nécessaire pour qu'un polynôme à coefficients réels de degré 3 soit scindé sur $\mathbb{R}$. Cette condition est-elle suffisante ?

Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi(A) = X^n A\left(\frac{1}{X}\right)$, qu'on appelle *retournement* de A.
De plus, on note D l'opérateur de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$: $D(A) = A'$.

5. a. Montrer que $\varphi(A)$ est un polynôme et déterminer ses coefficients.

   b. Exprimer le degré de $\varphi(A)$ en fonction de celui de A et de la multiplicité éventuelle de 0.

   c. Montrer que si $A \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$, alors $\varphi(A)$ l'est également.
   Indication : on pourra (ou non) utiliser le théorème de factorisation.

6. Soient $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ et $A(X) = X^5 + aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. Calculer $D(\varphi(D^2(A)))$.

7. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré n. On note, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mu_k = \dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$.
   Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors
   $$\forall k \in [\![0, n-2]\!], \quad \mu_k \mu_{k+2} \leqslant \mu_{k+1}^2.$$
   Indication : dériver, retourner, dériver...