# DS n°6 - Correction

**Exercice 1.** 1. ▸ Étude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par croissance comparée, $n^4 = o(2^n)$, donc $3\cdot 2^n + n^4 \underset{n\to\infty}{\sim} 3\cdot 2^n$.

Donc :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(3\cdot 2^n) \;=\; \ln(3) + n\ln(2) \underset{n\to\infty}{\sim} \boxed{n\ln(2).}$$

▸ Étude de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On applique $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^3)$ à $u = \frac{1}{\sqrt{n}}$ :

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On a alors :

$$b_n = e^{n\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \underset{n\to\infty}{=} e^{n\ln\left(1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)}.$$

On applique alors $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$ à $u = -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, ce qui donne, comme $o(u) \underset{n\to\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$ :

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

D'où :

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} -\frac{1}{2} + o(1).$$

Finalement, $b_n \underset{n\to\infty}{=} e^{-\frac{1}{2}+o(1)}$, donc $b_n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\frac{1}{2}}$, et donc $\boxed{b_n \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}}.}$

2. Au numérateur, $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\sin^2(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Au dénominateur :

$$\sqrt{4+x} = \sqrt{4\left(1+\frac{x}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}}.$$

En appliquant $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \frac{t}{2} + o(t)$ à $t = \frac{x}{4}$, on obtient

$$\sqrt{4+x} \underset{x\to 0}{=} 2\left(1 + \frac{x}{8} + o(x)\right) \underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{4} + o(x)$$

et donc :

$$\sqrt{4+x} - 2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{4} + o(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{4}.$$

Finalement, par quotient : $\delta(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{\frac{x}{4}} = \boxed{4x}$.

L'équivalent $\delta(x) \underset{x\to 0}{\sim} 4x$ signifie : $\delta(x) \underset{x\to 0}{=} 4x + o(x)$. On en déduit que :

- ▸ $\delta(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc $\delta$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\delta(0) := 0$ ;
- ▸ $\delta$ admet un $\mathrm{DL}_1$ en zéro, ce qui implique par théorème que $\delta$ est dérivable en 0, et que $\delta'(0) = 4$ (le coefficient en $x$ du DL).

**Exercice 2.** 1. Comme le premier tirage a lieu dans l'urne $U$, $\boxed{P(U_1) = 1.}$

L'évènement $U_2$ est réalisé si et seulement si le premier tirage, qui a lieu dans l'urne $U$, donne une boule noire. On a donc $\boxed{P(U_2) = \frac{1}{3}.}$

2. Si $U_2$ est réalisé, alors $U_3$ est réalisé lorsque le deuxième tirage (qui a lieu dans $U$) donne une boule noire. On a donc $\boxed{P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}}$ car le contenu de $U$ est toujours le même (tirages avec remise)

   Si $\overline{U_2}$ est réalisé, alors $U_3$ est réalisé lorsque le deuxième tirage (qui a lieu dans $V$) donne une boule blanche. On a donc $\boxed{P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{4}}$

   En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $U_2$, $\overline{U_2}$ on en déduit
$$P(U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2})P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2+3}{18} = \boxed{\frac{5}{18}\ .}$$

3. a. Les probabilités conditionnelles $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$ et $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$ s'obtiennent avec le même raisonnement que précédemment. La formule des probabilités totales avec $(U_n, \overline{U_n})$ comme système complet d'évènements donne :
$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1})\ ,$$
   c'est à dire
$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{4}(1-u_n) = \boxed{\frac{1}{12}u_n + \frac{1}{4}}\ .$$

   b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est arithmético-géométrique. On détermine $\alpha$ telle que $(u_n - \alpha)$ soit géométrique : si $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} - \alpha = \frac{1}{12}u_n + \frac{1}{4} - \alpha = \frac{1}{12}(u_n - \alpha)$ si $\frac{\alpha}{12} = \alpha - \frac{1}{4}$, autrement dit si $\alpha = \frac{3}{11}$.

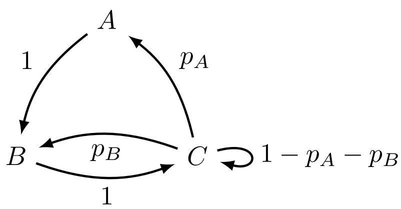
   La suite $(u_n - \frac{3}{11})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{12}$ et vaut $1 - \frac{3}{11}$ en $n = 1$, donc $\boxed{u_n = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{11}.}$

**Exercice 3.** 1. On calcule les puissances successives de $M$ :
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a+bc \\ 1 & c & b+c^2 \end{pmatrix} \text{ et } M^3 = \begin{pmatrix} a & ac & ac+ac^2 \\ b & a+bc & ac+b^2+bc^2 \\ c & b+c^2 & a+2bc+c^3 \end{pmatrix}.$$

On cherche à écrire $M^3$ comme une combinaison linéaire de $I_3$, $M$ et $M^2$. Si une telle combinaison linéaire existe, en identifiant les coefficients de la première colonne on voit qu'on a forcément $M^3 = aI_3 + bM + cM^2$. On vérifie que les 6 autres coefficients vérifient bien cette relation pour montrer qu'effectivement $M^3 = aI_3 + bM + cM^2$. Autrement dit le polynôme $\boxed{P(X) = X^3 - cX^2 - bX - a}$ est un polynôme annulateur de la matrice $M$.

2. Si $n \geqslant 2$, il suffit de choisir $\alpha$ ou $\beta$ égal à 1 et les autres coefficients nuls. Si $n = 3$, on a montré que $M^3 = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}I_3$. Supposons donc que $n > 3$. Considérons alors la division euclidienne du polynôme $X^n$ par le polynôme $P$, qui est de degré 3 : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^n = Q(X)P(X) + R(X)$. Comme $R$ est de degré inférieur ou égal à 2, il existe donc $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Alors, comme $P(M) = 0_3$, on a :
$$M^n = Q(M)P(M) + R(M) = R(M) = \alpha M^2 + \beta M + \gamma I_3.$$

3. On indique les probabilités conditionnelles sur le schéma suivant (par exemple, $\mathbb{P}_{B_k}(C_{k+1})$ est indiqué sur la flèche qui va de $B$ vers $C$) :



4. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $A_k$, $B_k$ et $C_k$ forment un système complet d'évènements, on a

$$p_{k+1} = \mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\underbrace{\mathbb{P}_{A_k}(A_{k+1})}_{=0} + \mathbb{P}(B_k)\underbrace{\mathbb{P}_{B_k}(A_{k+1})}_{=0} + \mathbb{P}(C_k)\underbrace{\mathbb{P}_{C_k}(A_{k+1})}_{=p_A} = r_k p_A,$$
$$q_{k+1} = \mathbb{P}(B_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\underbrace{\mathbb{P}_{A_k}(B_{k+1})}_{=1} + \mathbb{P}(B_k)\underbrace{\mathbb{P}_{B_k}(B_{k+1})}_{=0} + \mathbb{P}(C_k)\underbrace{\mathbb{P}_{C_k}(B_{k+1})}_{=p_B} = p_k + r_k p_B,$$
$$r_{k+1} = \mathbb{P}(C_{k+1}) = \mathbb{P}(A_k)\underbrace{\mathbb{P}_{A_k}(C_{k+1})}_{=0} + \mathbb{P}(B_k)\underbrace{\mathbb{P}_{B_k}(C_{k+1})}_{=1} + \mathbb{P}(C_k)\underbrace{\mathbb{P}_{C_k}(C_{k+1})}_{=1-p_A-p_B} = q_k + r_k(1 - p_A - p_B).$$

On peut mettre ces trois égalités sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \\ r_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_A \\ 1 & 0 & p_B \\ 0 & 1 & 1 - p_A - p_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix}$$

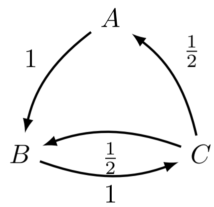
avec la matrice $M$ définie précédemment, pour $\boxed{a = p_A,\ b = p_B \text{ et } c = 1 - p_A - p_B.}$

5. Par une récurrence rapide on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix}$, et la condition initiale indique que $\begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha M^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma I_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

donc $\boxed{r_n = \alpha,\ q_n = \beta \text{ et } p_n = \gamma.}$

6. Comme $p_A = p_B = \frac{1}{2}$, on a maintenant le diagramme suivant :




a. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\boxed{P(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}.}$

b. Le polynôme $P(X) = X^3 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ admet 1 comme racine évidente. On peut donc factoriser par $X - 1$ : $P(X) = (X-1)(X^2 + X + \frac{1}{2})$ (deux manières de voir : soit on pose la division euclidienne du polynôme, soit on identifie les coefficients constant et dominant du facteur, et on étudie ensuite le coefficient devant le terme intermédiaire). Le discriminant de $X^2 + X + \frac{1}{2}$ est égal à $1 - 4\frac{1}{2} = -1$ donc $X^2 + X + \frac{1}{2}$ a deux racines complexes conjuguées. Les racines carrées complexes de $-1$ sont $i$ et $-i$, et les racines de $X^2 + X + \frac{1}{2}$ sont donc

$$x_1 = \frac{-1+i}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1-i}{2}.$$

Comme on a déterminé trois racines distinctes de $P$ et que $P$ est de degré trois, ces trois racines sont forcément de multiplicité 1. Sa forme factorisée est $\boxed{P(X) = (X-1)(X + \frac{i+1}{2})(X + \frac{1-i}{2}).}$

c. Pour déterminer $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, on utilise que 1, $x_1$ et $x_2$ sont des racines de $P$. On a alors, en exploitant la division euclidienne établie dans la question 2. :

$$\begin{cases} 1^n = Q(1)\underbrace{P(1)}_{=0} + R(1) = \alpha 1^2 + \beta 1 + \gamma \\ x_1^n = Q(1)\underbrace{P(x_1)}_{=0} + R(x_1) = \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \\ x_2^n = Q(1)\underbrace{P(x_2)}_{=0} + R(x_2) = \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma \end{cases}$$

Comme $x_2 = \overline{x_1}$, on a aussi $x_2^2 = \overline{x_1}^2$ et $x_2^n = \overline{x_1}^n$, et comme $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des réels, les deux dernières lignes sont redondantes (quantités conjuguées l'une de l'autre).
Comme $x_1 = \dfrac{i-1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{3i\pi/4}$, on a $x_1^2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{6i\pi/4} = -\dfrac{i}{2}$, et $x_1^n = \dfrac{1}{\sqrt{2}^n}\mathrm{e}^{3ni\pi/4}$.
On obtient donc le système à coefficients réels suivants :

$$\boxed{\begin{cases} 1 & = & \alpha & +\beta & +\gamma & \text{(première ligne)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) & = & & -\frac{\beta}{2} & +\gamma & \text{(partie réelle de la deuxième ligne)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) & = & -\frac{\alpha}{2} & +\frac{\beta}{2} & & \text{(partie imaginaire de la deuxième ligne)} \end{cases}}$$

On applique la transformation $L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2 + 2L_3$ pour rendre le système de Cramer :

$$\begin{cases} 1 + \frac{4}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{2}{\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) & = & & & +5\gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) & = & & -\frac{\beta}{2} & +\gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) & = & -\frac{\alpha}{2} & +\frac{\beta}{2} & \end{cases}$$

ce qui donne $\boxed{\begin{cases} \gamma = \frac{1}{5} + \frac{4}{5\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{2}{5\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right), \\ \beta = 2(\gamma - \frac{1}{\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) + \frac{4}{5\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right), \\ \alpha = \beta - \frac{2}{\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - \frac{6}{5\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right). \end{cases}}$

d. Comme $(p_0, q_0, r_0) = (\gamma, \beta, \alpha) = (1, 0, 0)$, on peut vérifier la condition initiale sur les expressions obtenues en évaluant en $n = 0$.
Puisque $(p_1, q_1, r_1) = (r_0 p_A, p_0 + r_0 p_B, q_0 + r_0(1 - p_A - p_B)) = (0, 1, 0)$, on peut également vérifier que $(\gamma, \beta, \alpha) = (0, 1, 0)$ pour $n = 1$, en utilisant que $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\sin(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Enfin, on peut également considérer le comportement asymptotique : on a lorsque $n \to \infty$, $p_n \to \frac{1}{5}$, $q_n \to \frac{2}{5}$ et $r_n \to \frac{2}{5}$. Or $M \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ donc cette limite est cohérente avec la relation de récurrence déterminée plus haut.

7. Si $p_A = \frac{1}{9}$ et $p_B = \frac{5}{9}$, alors $a = p_A = \frac{1}{9}$, $b = p_B = \frac{5}{9}$ et $c = 1 - p_A - p_B = \frac{1}{3}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/9 \\ 1 & 0 & 5/9 \\ 0 & 1 & 1/3 \end{pmatrix}$. Le polynôme annulateur déterminé dans le préliminaire s'écrit alors $P = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{5}{9}X - \frac{1}{9}$.
Comme précédemment, puisque $a + b + c = 1$, 1 est racine évidente de $P$. On factorise par $X - 1$ d'une manière ou d'une autre pour obtenir $P(X) = (X-1)(X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{9}) = (X-1)(X + \frac{1}{3})^2$ (identité remarquable).
Le polynôme $P$ a pour racine simple 1 et pour racine double $-\frac{1}{3}$. On obtient deux premières relations en évaluant la division euclidienne de la question 2. en 1 et $-\frac{1}{3}$ :

$$\begin{cases} 1^n = Q(1)\underbrace{P(1)}_{=0} + R(1) = \alpha 1^2 + \beta 1 + \gamma, \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n = Q\left(-\frac{1}{3}\right)\underbrace{P\left(-\dfrac{1}{3}\right)}_{=0} + R\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \beta\frac{1}{3} + \gamma, \end{cases}$$

et une troisième relation en évaluant la dérivée de cette division euclidienne en $-\frac{1}{3}$ qui est racine double de $P$, et vérifie donc $P'\left(-\frac{1}{3}\right)=0$. Comme $nX^{n-1}=QP'+Q'P+R'=QP'+Q'P+2\alpha X+\beta$,

$$n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=Q\left(-\frac{1}{3}\right)\underbrace{P'\left(-\frac{1}{3}\right)}_{=0}+Q'\left(-\frac{1}{3}\right)\underbrace{P\left(-\frac{1}{3}\right)}_{=0}-2\alpha\frac{1}{3}+\beta=-\frac{2}{3}\alpha+\beta.$$

Les réels $(\alpha,\beta,\gamma)$ sont donc solutions du système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrrr} 1 & = & \alpha & +\beta & +\gamma, \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^n & = & \frac{1}{9}\alpha & -\frac{1}{3}\beta & +\gamma, \\ n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} & = & -\frac{2}{3}\alpha & +\beta. & \end{array}\right.$$

On peut résoudre le système à l'aide du pivot de Gauss; on obtient que $\gamma\to\frac{1}{16}$, $\beta\to\frac{3}{8}$ et $\alpha\to\frac{9}{16}$ quand $n$ tend vers $+\infty$, et on peut à nouveau vérifier que $M\begin{pmatrix}9/16\\3/8\\1/16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9/16\\3/8\\1/16\end{pmatrix}$.

**Exercice 4.** 1. ▸ On a

$$\begin{aligned}\ln\frac{\sin x}{x}&=\ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)\\&=\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^2+o(x^4)\\&\qquad\text{car }\left\{\begin{array}{c}\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2)\\ u=-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\\ o(u^2)=o(x^4)\end{array}\right.\\&\boxed{=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).}\end{aligned}$$

▸ On a

$$\begin{aligned}\ln\cos x&=\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)\\&=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3+o(x^6)\\&\qquad\text{car }\left\{\begin{array}{c}\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3)\\ u=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\underset{x\to0}{\longrightarrow}0\\ o(u^3)=o(x^6)\end{array}\right.\\&\boxed{=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).}\end{aligned}$$

2. a. Soit $E=\left\{x^2+f(x)^2\,;\,x\in\mathbb{R}\right\}$. Cet ensemble est non vide (il contient $f(0)^2$) et minoré (par 0), donc il admet une borne inférieure, ce qui justifie l'existence de $\Delta(f)$.
Comme $\Delta(f)=\inf E$, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ telle que $d_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Delta(f)$. Vu la définition de $E$, cela se traduit immédiatement en l'existence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'énoncé.

b. Puisque $x_n^2+f(x_n)^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Delta(f)$, la suite $(x_n^2+f(x_n)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par $M$, disons). Comme $f(x_n)^2\geqslant0$ pour tout $n$, on en déduit que $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (toujours par $M$) puis que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (à valeurs dans $\left[-\sqrt{M},\sqrt{M}\right]$).
Preuve de ce qui est admis : d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass , on peut trouver une extractrice $\phi$ et $a\in\mathbb{R}$ telle que $x_{\phi(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$.
Par continuité de $f$ et par opérations, $x_n^2+f(x_n)^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a^2+f(a)^2$.
Par unicité de la limite, on en déduit $\Delta(f)=a^2+f(a)^2$.

c. La fonction $g : x \mapsto x^2 + f(x)^2$ est dérivable par opérations, et elle admet un minimum en $a$ (qui est évidemment intérieur, puisque le domaine de la fonction est l'intervalle $\mathbb{R}$, ouvert).

On en déduit $g'(a) = 0$, c'est-à-dire $2a + 2\,f'(a)\,f(a) = 0$, ce qui conclut.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. D'après b., on peut trouver $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n$.

- Comme $\delta_n \leqslant 0^2 + f_n(0)^2 = 1$, on a $a_n^2 \leqslant a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n \leqslant 1$, d'où l'on tire $|a_n| \leqslant 1$.
- Par parité de $f_n$, quitte à remplacer $a_n$ par son opposé, on peut donc supposer $a_n \in [0, 1]$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On cherche une suite $(v_n)$ qui tend vers 0 et telle que $\cos^{2n}(v_n)$ converge vers 0. Si on dispose d'une telle suite, alors on peut en déduire que la suite $(a_n)$ converge vers 0 par majoration :

$$a_n^2 \leqslant a_n^2 + \cos^{2n}(a_n) = \delta_n \leqslant v_n^2 + \cos^{2n}(v_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

On va utiliser astucieusement l'équivalent $\ln(\cos(v)) \underset{v\to 0}{\sim} -\frac{v^2}{2}$ déterminé dans la question préliminaire : on obtient que si $v_n$ tend vers 0, $\cos^{2n}(v_n) = \exp\left(2n \ln\cos(v_n)\right)$ va tendre vers 0 si $-2n\frac{v_n^2}{2}$ tend vers $-\infty$.

On choisit pour cela $v_n = n^{-1/3}$ : c'est bien une suite qui converge vers 0, et comme $-nv_n^2 = -n^{1/3}$, le terme à l'intérieur de l'exponentielle tend vers $-\infty$ et $\cos^{2n}(v_n)$ tend vers 0.

On en déduit $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ comme expliqué plus haut.

4. a. D'après la question c., on a $-a_n = -\cos^n(a_n)\,n\,\sin(a_n)\,\cos^{n-1}(a_n)$.

La démonstration de la question précédente donnait $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, pour $n$ suffisamment grand, on a $\delta_n < 0^2 + \cos^{2n}(0) = 1$ et donc $a_n \neq 0$. Pour de tels $n$, la relation précédente se réécrit $\frac{1}{n} = \frac{\sin(a_n)}{a_n}\cos^{2n-1}(a_n)$, et l'on obtient la relation de l'énoncé en passant au logarithme.

b. En utilisant les DL calculés à l'échauffement et car $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, la relation de la question précédente donne

$$\begin{aligned}\ln n &= \left(\frac{a_n^2}{6} + o(a_n^2)\right) + (2n-1)\left(\frac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)\right)\\ &= n\,a_n^2 + o(n\,a_n^2),\end{aligned}$$

donc $\ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,a_n^2$, puis $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$ d'après les propriétés multiplicatives de l'équivalent.

5. a. On a $a_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$, donc $a_n^2 = o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$.

On en déduit $\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a_n^2}{6} = o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$ et $\ln\cos a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{a_n^2}{2} = o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$.

b. On a

$$\begin{aligned}\ln n &= -\ln\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right) - 2n\ln\cos a_n + \ln\cos a_n\\ &= -2n\,\ln(\cos a_n) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= n\left(a_n^2 + \frac{a_n^4}{6} + o(a_n^4)\right) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\\ &= n\,a_n^2 + n\frac{a_n^4}{6} + o(n\,a_n^4) + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).\end{aligned}$$

On remarque que $n\,a_n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2 n}{n}$, donc $n\,\frac{a_n^4}{6} + o(n\,a_n^4) = \frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$, ce qui donne

$$\ln n = n\,a_n^2 + \frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right).$$

En introduisant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_n^2 - \frac{\ln n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, il vient

$$\ln n = \ln n + n\, b_n + \frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} n\, b_n &= -\frac{\ln^2 n}{6n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right) \\ \text{donc} \qquad b_n &= -\frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

On a ainsi montré

$$\boxed{a_n^2 = \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).}$$

c. On a $\cos^{2n} a_n = \exp(2n \ln\cos a_n)$. Décomposons le calcul :
- on a

$$\begin{aligned} \ln\cos a_n &= -\frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^2}{12} + o(a_n^4) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)^2 + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \\ &= -\frac{\ln n}{2n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right) \quad ; \end{aligned}$$

- on en déduit $2n \ln\cos a_n = -\ln n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)$ ;
- enfin, on a

$$\begin{aligned} \cos^{2n} a_n &= \exp(2n \ln\cos a_n) \\ &= \exp\left(-\ln n + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\exp\left(o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + o\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\delta_n = a_n^2 + \cos^{2n} a_n = \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln^2 n}{6n^2} + o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right).}$$

**Exercice 5.** 1. cf Exo 18 TD polynômes
2. idem
3. idem
4. Un polynôme réel de degré 2 est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est positif ou nul. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et de degré trois, alors d'après la question précédente $P'$ est encore scindé, donc de discriminant positif ou nul puisque $P'$ est de degré 2. Si $P$ s'écrit $aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a$ non nul, $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et on a donc nécessairement $(2b)^2 \geqslant 12ac$, soit $b^2 \geqslant 3ac$.

5. a. Si $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$\varphi(A) = X^n A\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{X}\right)^k X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$$

est un polynôme dont les coefficients sont ceux de $A$, parcourus dans l'autre sens : le coefficient de $\varphi(A)$ de degré $k$ est égal à $a_{n-k}$.

b. Si 0 est racine de $A$ de multiplicité $m$, alors $X^m$ divise $A$ et pas $X^{m+1}$, donc $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$ et $a_m \neq 0$. On en déduit que $\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-m} a_{n-k} X^k$, avec $a_m \neq 0$, donc $\varphi(A)$ est de degré $n - m$.

c. Si $A$ est scindé sur $\mathbb{R}$, il se factorise de la manière suivante :

$$A = \lambda \prod_{i=1}^{m} (X - \alpha_i)^{m_i} \prod_{i=1}^{m} (\frac{1}{X} - \alpha_i)^{m_i} X^{m_i}$$

avec $\alpha_i$ les racines réelles de $A$ de multiplicité $m_i$, la somme des multiplicités valant $n$.
Alors, comme $X^n = \prod_{i=1}^{m} X^{m_i}$,

$$\varphi(A) = X^n \lambda \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right)^{m_i} = \lambda \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{X} - \alpha_i\right)^{m_i} X^{m_i} = \lambda \prod_{i=1}^{m} (1 - \alpha_i X)^{m_i}$$

Si 0 n'est pas racine, on a presque fini :

$$\varphi(A) = (-1)^n \lambda \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{m_i} \prod_{i=1}^{m} \left(X - \frac{1}{\alpha_i}\right)^{m_i}.$$

On a factorisé $\varphi(A)$ en produit de polynômes de degré 1 à coefs réels, donc $\varphi(A)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
Si 0 est une racine (disons $\alpha_1$ sans perte de généralité), alors le terme en $(1 - \alpha_1 X)^{m_1}$ est égal à 1, et la factorisation se réécrit donc :

$$\varphi(A) = \lambda \prod_{i=2}^{m} (1 - \alpha_i X)^{m_i} = (-1)^{n-m_1} \lambda \prod_{i=2}^{m} \alpha_i^{m_i} \prod_{i=2}^{m} \left(X - \frac{1}{\alpha_i}\right)^{m_i}.$$

On a factorisé $\varphi(A)$ en produit de polynômes de degré 1 à coefs réels, donc $\varphi(A)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.
*Remarque :* on retrouve bien le degré déterminé dans la question précédente)

6. Soient $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ et $A(X) = X^5 + aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. Alors $D^2(A) = 20X^3 + 12aX^2 + 6bX + 2c$, puis $\varphi(D^2(A)) = 2cX^3 + 6bX^2 + 12aX + 20$,
et par conséquent $\boxed{D(\varphi(D^2(A))) = 6cX^2 + 12bX + 12a.}$
*Remarque :* on a réussi à isoler trois coefficients consécutifs du polynôme initial.

7. Soit $P \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Pour chaque $k \in [\![0, n-2]\!]$, on va faire apparaître un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont reliés à $a_k$, $a_{k+1}$ et $a_{k+2}$.
On commence par faire disparaître les termes de degré inférieur à $k$ en dérivant $k$ fois $P$ :

$$D^k(P) = \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = \sum_{i=0}^{n-k} a_{i+k} \frac{(i+k)!}{i!} X^i.$$

Ensuite on retourne ce polynôme, qui est de degré $n - k$ :

$$\varphi(D^k(P)) = \sum_{i=0}^{n-k} a_{(n-k-i)+k} \frac{((n-k-i)+k)!}{(n-k-i)!} X^i = \sum_{i=0}^{n-k} a_{n-i} \frac{(n-i)!}{(n-k-i)!} X^i.$$

et on dérive $n-k-2$ fois le résultat obtenu, pour ne garder plus qu'une somme de 3 termes consécutifs :

$$\begin{aligned}
D^{n-k-2}(\varphi(D^k(P))) &= \sum_{i=n-k-2}^{n-k} a_{n-i}\frac{(n-i)!}{(n-k-i)!}\frac{i!}{(i-(n-k-2))!}X^{i-(n-k-2)} \\
&= n!\sum_{i=n-k-2}^{n-k} \frac{\mu_{n-i}}{(n-k-i)!(i-(n-k-2))!}X^{i-(n-k-2)} \\
&= n!\left(\frac{\mu_{k+2}}{2}+\mu_{k+1}X+\frac{\mu_k}{2}X^2\right).
\end{aligned}$$

On a utilisé pour passer à la deuxième ligne la relation $n!\mu_{n-i} = n!\frac{a_{n-i}}{\binom{n}{n-i}} = a_{n-i}(n-i)!i!$, et mis $n!$ en facteur de la somme. Dans la dernière expression, le terme constant correspond au terme de la somme d'indice $i = n-k-2$, le terme en $X$ correspond à l'indice $i = n-k-1$ et le terme en $X^2$ à $i = n-k$.

Or, comme $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$, $D^k(P)$ est également scindé sur $\mathbb{R}$, en itérant le résultat de la question 3. Alors $\varphi(D^k(P))$ est encore scindé d'après la question 5.a.
Puis $D^{n-k-2}(\varphi(D^k(P)))$ doit également être scindé, à nouveau par la question 3.
Le polynôme de degré 2 obtenu plus haut est donc scindé sur $\mathbb{R}$, et son discriminant $\mu_{k+1}^2 - 4\frac{\mu_k}{2}\frac{\mu_{k+2}}{2}$ doit donc être positif ou nul. On obtient donc les conditions nécessaires qu'il fallait démontrer : si $P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et de degré $n$, alors pour tout $k$ dans $[\![0, n-2]\!]$,

$$\boxed{\mu_{k+1}^2 \geqslant \mu_k\mu_{k+2}.}$$