DS n°7

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont évaluées.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
*Ce sujet contient **3 pages**.*
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Les questions de cette exercice, proches du cours, sont indépendantes les unes des autres.

1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier la réponse.

   a. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z+1=0\}$.

   b. $E_2 = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \mid f(0)=f(1)=0\}$.

   c. $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 = 0\}$.

   d. $E_4 = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n\}$.

2. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants : $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   a. Déterminer successivement si les familles (u_1,u_2), puis (u_1,u_2,u_3), puis (u_1,u_2,u_3,u_4) sont libres.

   b. La famille (u_1,u_2,u_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Si ce n'est pas le cas, donnez explicitement un exemple de vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de la famille.

   c. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1,u_2) = \mathrm{Vect}(u_3,u_4)$.

3. Démontrer que l'application $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \quad\mapsto XP(X) + P'(2X) \end{cases}$ est linéaire. Est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 (Suite d'intégrales)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \, e^{-2\,t} dt.$$

1. Justifier pour $n \in \mathbb{N}$ l'existence de I_n et calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leqslant I_n$, et que $I_n \geqslant 0$. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ et, à l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$2\,I_{n+1} = 1 - (n+1)\,I_n.$$

4. En déduire que, pour $n \to +\infty$: $I_n \sim \frac{1}{n}$.

5. Montrer que pour $n \to +\infty$: $I_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 3. 1. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2\ \exp(x^2)}$.

2. On fixe $a, b \in \mathbb{R}$, et on considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) - x\dfrac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$.

   a. Justifier que f admet un développement limité à tout ordre en 0.

   b. Déterminer les valeurs de a et de b pour que le développement limité de f en 0 ait son premier terme non nul de degré le plus élevé possible.

Exercice 4. Étude de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\big(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1\big)d\theta$.

1. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Factoriser, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $X^n - 1$.

   c. En déduire que
$$\prod_{k=0}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) X + 1\right) = \left(X^n - 1\right)^2.$$

2. a. Justifier que pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, l'intégrale $I(x)$ est bien définie.

   b. Calculer la valeur de $I(x)$ pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ en utilisant une somme de Riemann.
   Indication. On pourra distinguer les cas $|x| > 1$ et $|x| < 1$.

Exercice 5. Pour $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^n = f \circ \cdots \circ f$ la composée de n fois la fonction f. Par convention, $f^0 = Id_{\mathbb{R}^3}$, et on notera $Id = Id_{\mathbb{R}^3}$.

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x - y - 2z \\ -x + 2z \\ 5x - y - 3z \end{pmatrix} \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) \subset \mathrm{Ker}\left((f - Id)^2\right)$.
3. Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tels que (v_1) soit une base de $\mathrm{Ker}(f - Id)$.
4. Déterminer $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que (v_1, v_2) soit une base de $\mathrm{Ker}\left((f - Id)^2\right)$. *Indice : on pourra calculer* $(f - Id)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que (v_3) soit une base de $\mathrm{Ker}(f + Id)$.
6. Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dans cette base.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $f^n(v_1)$ et $f^n(v_3)$.
8. Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f - Id)^k$, et en déduire $f^n(v_2)$.
9. En déduire l'expression de $f^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit A une partie de E. On dit que A est un sous-espace affine de E s'il existe un sous-espace vectoriel F de E et $a \in E$ tels que :

$$A = \{a + u,\, u \in F\}.$$

1. a. Montrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A est un sous-espace affine de E.

   b. Soit $a \in E$, montrer que $\{a\}$ est un sous-espace affine de E.

   c. Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ est un sous-espace affine et $(v, w) \in A^2$, alors $v - w \in F$.

   d. Montrer que si $A = \{a + u, u \in F\}$ et $\alpha \in A$, alors $A = \{\alpha + u, u \in F\}$.

   e. Soit A un sous-espace affine de E. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $0_E \in A$.

2. Dans cette question, on pose : $E = \mathbb{K}[X]$,

$$F = \{P \in E,\, P(1) = P(-1)\} \text{ et } A = \{P \in E,\, P(1) = 2 + P(-1)\}.$$

   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

   b. Montrer que $X \in A$.

   c. Montrer que A est un sous-espace affine de E.

3. Dans cette question, on pose : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles),

$$F = \{u \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 8u_n = 0\} \text{ et } A = \{u \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 8u_n = 10\}.$$

   a. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer une base.

   b. Si u est une suite de A qui converge, déterminer sa limite. L'ensemble A contient-il une suite constante ?

   c. Montrer que A est un sous-espace affine de E et donner la forme générale des éléments de A.

En bonus :

Exercice 7. Soient x et m deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. a. Montrer que :

$$x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1).$$

   b. En déduire que que si $x^m - 1$ est premier, alors $x = 2$.

2. a. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

   b. En déduire que si $2^m - 1$ est premier, alors m est premier.

   c. En déduire que si $2^m - 1$ est premier et $m \geqslant 3$, alors le chiffre des unités de $2^m - 1$ est 1 ou 7.

3. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = x^n - 1$.
   Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$. On note r le reste de la division euclidienne de a par b.
   Montrer que u_r est le reste de la division euclidienne de u_a par u_b.