DS N°7 - Correction

Exercice 1. 1. Notons qu'il suffit de vérifier que les ensembles donnés sont (ou non) des sous-espaces vectoriels. /3

a. $(0,0,0)$ n'est pas un élément de E_1, et donc E_1 n'est pas un espace vectoriel.

b. $E_2 \subset \mathcal{C}^1([0,1])$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, la fonction constante égale à 0 appartient à E_2. Il reste seulement à vérifier si E_2 est stable par combinaison linéaire : soient $f, g \in E_2$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda f + g$ est toujours de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, et par ailleurs,

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0 = (\lambda f + g)(1),$$

donc $\lambda f + g \in E_2$. On en conclut que E_2 est un espace vectoriel.

c. Cette fois, la matrice nulle appartient bien à E_3, mais au vu de sa définition, on peut se douter que cet espace n'est pas stable par combinaison linéaire, il s'agit donc de trouver un contre-exemple. Considérons donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que $A^2 = B^2 = 0$, mais par contre $(A+B)^2 = I_2 \neq 0$, ce qui montre bien que E_3 n'est pas un espace vectoriel.

d. Montrons que $E_4 = \left\{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_n\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: la suite nulle vérifie la condition donnée, et si u et v sont dans E_4 et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $w = u + \lambda v$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+3} = u_{n+3} + \lambda v_{n+3} = u_n + \lambda v_n = w_n$$

donc $w \in E_4$. On en conclut que E_4 est un espace vectoriel.

2. a. La famille des deux vecteurs (u_1, u_2) est libre puisqu'ils ne sont pas colinéaires. Par contre (u_1, u_2, u_3) est liée puisque $u_3 = 2u_2 - u_1$, et enfin (u_1, u_2, u_3, u_4) est liée puisqu'elle contient une famille liée. /2

b. La famille (u_1, u_2, u_3) n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$, sinon elle serait libre puisqu'elle est de cardinal 3 ! Montrons-le sans dimension : comme $u_3 \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$ (cf plus haut), l'espace engendré par les (u_1, u_2, u_3) est le plan engendré par u_1 et u_2. Le produit vectoriel de u_1 et u_2, par exemple, n'est pas dans ce plan, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ n'est pas dans l'espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3). /1

c. On montre les deux inclusions : par linéarité il suffit de montrer que u_1 et u_2 sont dans $\operatorname{Vect}(u_3, u_4)$ et que u_3 et u_4 sont dans $\operatorname{Vect}(u_1, u_2)$. /1
On commence par ces deux derniers : on a déjà montré que $u_3 = 2u_2 - u_1 \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$, et par ailleurs $u_4 = u_2 - u_1 \in \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$. Donc $\operatorname{Vect}(u_3, u_4) \subset \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$.
Pour l'autre inclusion, on utilise que $u_1 = u_3 - 2u_4$ et $u_2 = u_3 - u_4$.
Alternative, avec la dimension : Une fois qu'on a montré que $\operatorname{Vect}(u_3, u_4) \subset \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$, on peut dire que comme (u_1, u_2) et (u_3, u_4) sont des familles libres, les deux sous-espaces vectoriels sont de dimension 2, et on a donc l'inclusion réciproque grâce au cours de dimension finie.

3. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. /3

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)(X) + (\lambda P + Q)'(2X) \\
&= X(\lambda P(X) + Q(X)) + \lambda P'(2X) + Q'(2X) \\
&= \lambda(XP(X) + P'(2X)) + XQ(X) + Q'(2X) \\
&= \lambda\phi(P) + \phi(Q),
\end{aligned}$$

et donc ϕ est linéaire. Si P est non nul, le degré de $\phi(P)$ est égal à $\deg P + 1$. Ceci a deux conséquences :

- ϕ est injective, puisque si P est non nul, $\phi(P) \neq 0$.
- ϕ n'est pas surjective puisqu'il n'est pas possible que $\phi(P)$ soit de degré 0. Autrement dit l'image de ϕ ne contient pas les polynômes constants.

Exercice 2 (Suite d'intégrales)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n \, e^{-2\,t} dt.$$

1. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto (1-t)^n \, e^{-2\,t}$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc I_n est bien définie. /2

$$I_0 = \int_0^1 e^{-2\,t} dt = \left[\frac{-1}{2} e^{-2\,t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right),$$

$$I_1 = \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{u(t)} \underbrace{e^{-2\,t}}_{v'(t)} dt = \left[(1-t)\frac{-1}{2} e^{-2\,t}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2\,t} dt = \frac{1}{2}(1 - I_0) = \frac{1}{4}(2 - 2I_0) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{e^2}\right).$$

On a procédé à une intégration par parties avec $u(t) = 1 - t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^{-2\,t}$ et $v(t) = \dfrac{-1}{2} e^{-2\,t}$.

2. Pour $t \in [0,1]$, $0 \leqslant 1 - t \leqslant 1$ donc $(1-t)^{n+1} \leqslant (1-t)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et comme $e^{-2t} > 0$, on a donc $0 \leqslant (1-t)^{n+1} e^{-2t} \leqslant (1-t)^n e^{-2t}$ pour tout $t \in [0,1]$. Par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, cela montre que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un réel positif ou nul. /2

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $e^{-2t} \leqslant 1$ pour tout $t \in [0,1]$, et $(1-t)^n \geqslant 0$, on a $(1-t)^n e^{-2t} \leqslant (1-t)^n$ donc par croissance de l'intégrale sur $[0,1]$, $I_n \leqslant \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$. On procède à une nouvelle intégration par parties en posant $u(t) = (1-t)^{n+1}$ et $v(t) = \dfrac{-1}{2} e^{-2\,t}$, de sorte que $u'(t) = -(n+1)(1-t)^n$ et $v'(t) = e^{-2t}$. On a alors : /2

$$I_{n+1} = \left[(1-t)^{n+1} \frac{-1}{2} e^{-2\,t}\right]_0^1 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1-t)^n \, e^{-2\,t} dt = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n,$$

d'où le résultat demandé.

4. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$, on en déduit par encadrement que I_n tend vers 0, tout comme I_{n+1}. La relation précédente donne $1 - nI_n = I_n + 2I_{n+1} \to 0$ donc $nI_n \to 1$ et $I_n \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$. /1

5. Comme $I_{n+1} \sim \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ quand $n \to \infty$, on écrit $I_{n+1} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ dans l'égalité $1 - (n+1)I_n = 2I_{n+1}$, et on écrit $I_n = \frac{1}{n} + b_n$, où b_n est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ que l'on cherche à préciser. /2

$$\begin{aligned} 1 - (n+1)\left(\frac{1}{n} + b_n\right) &= \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - 1 - \frac{1}{n} - nb_n + b_n. \end{aligned}$$

Comme b_n est un $o\left(\frac{1}{n}\right)$, il reste seulement

$$-\frac{1}{n} - nb_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

donc $b_n = -\dfrac{3}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et pour conclure :

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 3. 1. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2\exp(x^2)}$. On observe avant toute chose que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ entier, et paire. Elle est l'inverse d'une fonction de classe C^∞ qui ne s'annule pas, et est donc elle aussi de classe C^∞ et admet des DL à tout ordre en 0. /2

On a

$$\begin{aligned}
& & \exp(x^2) &= 1 + x^2 + o(x^2) \\
&\text{donc} & 1 + x^2\exp(x^2) &= 1 + x^2 + x^4 + o(x^4) \\
&\text{donc} & f(x) &= \frac{1}{1+x^2+x^4+o(x^4)} \\
& & &= 1 - \left(x^2 + x^4 + o(x^4)\right) + \left(x^2 + o(x^2)\right)^2 + o(x^4) \\
& & & \qquad \text{car} \begin{cases} \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ u = x^2 + x^4 + o(x^4) \underset{x\to 0}{\sim} x^2 \\ o(u^2) = o(x^4) \end{cases} \\
& & &= 1 - x^2 + o(x^4).
\end{aligned}$$

2. On fixe $a, b \in \mathbb{R}$, et on considère la fonction $f : x \mapsto \arctan(x) - x\dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$.

a. Quelque soit b dans $\mathbb{R}$, $1 + bx^2$ ne s'annule pas dans un voisinage de 0. La fonction f est donc de classe C^∞ au voisinage de 0, comme somme et quotient de fonctions de classe C^∞ avec le dénominateur qui ne s'annule pas. Elle admet donc un DL à tout ordre en 0. /1

b. Comme $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, son DL à l'ordre 7 en 0 s'obtient aisément : /2

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7).$$

On va développer $x\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ au moins jusqu'à l'ordre 7 et choisir a et b de sorte à annuler le plus de termes possibles.

$$\begin{aligned}
x\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &\underset{x\to 0}{=} (x + ax^3)(1 - bx^2 + (bx^2)^2 - (bx^2)^3 + o(x^6)) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + (a-b)x^3 + (b^2 - ab)x^5 + (ab^2 - b^3)x^7 + o(x^7).
\end{aligned}$$

- Le terme de premier ordre se compense avec celui du DL d'arctan.
- Pour annuler le terme d'ordre trois, il faut imposer $a - b = -\frac{1}{3}$.
- Pour annuler le terme d'ordre cinq, il faut imposer $b^2 - ab = \frac{1}{5}$.
  Or $b^2 - ab = b(b-a) = \frac{b}{3}$ si on a annulé le terme d'ordre 3.
  Cela impose donc que $b = \frac{3}{5}$ puis $a = b - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}$.

Pour que le développement limité de f en 0 ait son premier terme non nul de degré le plus élevé possible, il faut donc choisir $a = \frac{4}{15}$ et $b = \frac{3}{5}$. Le premier terme non nul est de degré 7 (on peut vérifier que $ab^2 - b^3 = b^2(a-b) \neq -\frac{1}{7}$).

Exercice 4. Étude de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\big(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1\big)d\theta$.

1. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Le polynôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ a pour discriminant $4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2(\theta)$, qui a pour racines carrées complexes $\pm 2i\sin(\theta)$. Il admet donc deux racines complexes conjuguées, à savoir $\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)$, autrement dit $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Comme il est de degré deux et unitaire, on peut écrire sa factorisation : /1,5

$$X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme $X^n - 1$ admet pour racine les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire les $e^{2ik\pi/n}$, pour k allant de 0 à $n-1$. Il y en a n, et c'est le degré de $X^n - 1$, donc elles sont toutes racines simples, et comme le polynôme est unitaire on a la factorisation : /1,5

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{2ik\pi/n}\right).$$

c. En utilisant les deux relations précédentes, on obtient /1

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)(X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) \\ &= \big(X^n - 1\big)^2.\end{aligned}$$

en utilisant que $\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) = \overline{\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \overline{X^n - 1} = X^n - 1$.

2. a. Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, alors quel que soit $\theta \in [0, 2\pi]$, $x^2 - 2\cos(\theta)x + 1$ ne s'annule pas, est donc strictement positif et $\theta \mapsto \ln(x^2 - 2\cos(\theta)x + 1)$ est donc bien définie et continue par composition sur le segment $[0, 2\pi]$: l'intégrale $I(x)$ est donc bien définie. /1

b. Si $x \neq \pm 1$, on écrit $I(x)$ comme limite d'une somme de Riemann pour utiliser ce qui précède : /3

$$\begin{aligned}I(x) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)x + 1\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)x + 1\right)\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{2\pi}{n}\ln\left((x^n - 1)^2\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4\pi}{n}\ln|x^n - 1|.\end{aligned}$$

Il faut à présent distinguer deux cas :

- si $|x| > 1$, $|x|^n$ tend vers $+\infty$ et $|x^n - 1|$ est équivalent à $|x^n| = |x|^n$. Alors par propriété du ln,

$$\ln|x^n - 1| = \ln|x|^n + \ln|1 - \frac{1}{x^n}| \underset{n\to\infty}{\sim} n\ln|x|$$

et on obtient

$$I(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{4\pi}{n}\ln|x^n - 1| = 4\pi\ln|x|.$$

- si $|x| < 1$, x^n tend vers 0 et alors $\ln|x^n - 1|$ converge vers 0 quand $n \to \infty$. On en conclut $I(x) = 0$.

Exercice 5. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -x+2z \\ 5x-y-3z \end{pmatrix} \end{array}$.

1. Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\lambda\tilde{x} \\ y+\lambda\tilde{y} \\ z+\lambda\tilde{z} \end{pmatrix}$, et donc /1

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4(x+\lambda\tilde{x})-(y+\lambda\tilde{y})-2(z+\lambda\tilde{z}) \\ -(x+\lambda\tilde{x})+2(z+\lambda\tilde{z}) \\ 5(x+\lambda\tilde{x})-(y+\lambda\tilde{y})-3(z+\lambda\tilde{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x-y-2z \\ -x+2z \\ 5x-y-3z \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4\tilde{x}-\tilde{y}-2\tilde{z} \\ -\tilde{x}+2\tilde{z} \\ 5\tilde{x}-\tilde{y}-3\tilde{z} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda f\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

donc $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Alternative : on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ de sorte que $f : X \mapsto AX$ est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, linéaire d'après le cours.

2. Si $v \in \mathrm{Ker}(f-Id)$, alors $(f-Id)^2(v) = (f-Id)((f-Id)(v)) = 0$, donc on a bien l'inclusion $\mathrm{Ker}(f-Id) \subset \mathrm{Ker}\left((f-Id)^2\right)$. /1

3. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. /1,5
Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f-Id) \iff \begin{cases} 3x-y-2z=0 \\ -x-y+2z=0 \\ 5x-y-4z=0 \end{cases} \iff \cdots \iff x=y=z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Notons $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vient de montrer que $\mathrm{Ker}(f-Id) \subset \mathrm{Vect}(v_1)$, et l'inclusion réciproque est vraie car on a bien $(f-Id)(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc déterminé une base (v_1) de $\mathrm{Ker}(f-Id)$.

4. Pour alléger les calculs, on utilise l'écriture matricielle : $f-Id$ est associée à la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ qui a /2
pour carré $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -8 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Autrement dit si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f-Id)^2 \iff \begin{cases} 8x-8z=0 \\ -4x+4z=0 \end{cases} \iff$
$x = z \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a fait apparaître artificiellement v_1 comme premier vecteur, et on définit $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce qui précède montre que $\mathrm{Ker}(f-Id)^2 \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, et on a l'inclusion réciproque en vérifiant que v_2 est bien dans $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$ (il est clair que v_1 y est d'après ce qui précède).
Comme (v_1, v_2) est une famille de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre, et c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$ qu'elle engendre.
Remarque : avec l'indication, on pouvait voir qu'en définissant $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(f-Id)(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_1$ est dans $\mathrm{Ker}(f-Id)$ d'après la question précédente, donc v_2 est dans $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$, et non colinéaire à v_1. Cela suffit à conclure si on s'autorise à raisonner avec la dimension... mais il faut justifier que $\mathrm{Ker}(f-Id)^2$ est de dimension 2 et pas 3.

5. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. /1,5

Alors $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f+Id) \iff \begin{cases} 5x-y-2z=0 \\ -x+y+2z=0 \\ 5x-y-2z=0 \end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} x=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Notons $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On vient de montrer que $\operatorname{Ker}(f+Id) \subset \operatorname{Vect}(v_3)$, et l'inclusion réciproque est vraie car on a bien $(f+Id)(v_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a donc déterminé une base (v_3) de $\operatorname{Ker}(f+Id)$.

6. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Montrons qu'il existe un unique triplet $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tel que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 =$ /2
$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci équivaut au système

$$\left\{\begin{array}{llllll} \lambda_1 & & & = & x \\ \lambda_1 & +\lambda_2 & -2\lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 & & \lambda_3 & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 & = x \\ \lambda_2 & = y+2\lambda_3-\lambda_1 = y+2z-3x \\ \lambda_3 & = z-x \end{array}\right.$$

Comme le système a une unique solution, (v_1, v_2, v_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$, et les coordonnées de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dans cette base sont donc $(x, y+2z-3x, z-x)$, autrement dit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xv_1 + (y+2z-3x)v_2 + (z-x)v_3.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $v_1 \in \operatorname{Ker}(f-Id)$, $f(v_1) = v_1$ et par récurrence immédiate $f^n(v_1) = v_1$. Comme $v_3 \in \operatorname{Ker}(f+Id)$, $f(v_3) = -v_3$ et par récurrence immédiate $f^n(v_3) = (-1)^n v_3$, en utilisant la linéarité de f. /2

8. Si $n \in \mathbb{N}^*$, et si f et g sont des endomorphismes qui commutent, alors on peut montrer la formule du binôme de Newton comme pour les matrices : $(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k}$, par récurrence sur n. On applique ensuite cette formule aux endomorphismes $f - Id$ et $g = Id$ (qui commutent !). /3
Comme $(f-Id)^k(v_2)$ est nul pour tout $k \geqslant 2$, on en déduit $f^n(v_2) = n(f-Id)(v_2) + v_2 = -nv_1 + v_2$ d'après le calcul effectué plus haut.

9. En utilisant l'écriture de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans la base (v_1, v_2, v_3), on obtient : /2

$$\begin{aligned} f^n \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= f^n(xv_1 + (y+2z-3x)v_2 + (z-x)v_3) \\ &= xf^n(v_1) + (y+2z-3x)f^n(v_2) + (z-x)f^n(v_3) \quad \text{par linéarité de } f^n \\ &= xv_1 + (y+2z-3x)(-nv_1+v_2) + (z-x)(-1)^n v_3 \\ &= \begin{pmatrix} x-n(y+2z-3x) \\ x+(1-n)(y+2z-3x)-2(z-x)(-1)^n \\ x-n(y+2z-3x)+(z-x)(-1)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie qu'on obtient l'identité pour $n = 0$ et la fonction f pour $n = 1$.

Exercice 6. 1. a. Si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A contient 0_E et $A = \{0_E + u, u \in A\}$ donc A est un sous-espace affine de E avec $a = 0_E$ /1

b. Soit $a \in E$. Alors $\{a\} = \{a + u, u \in \{0_E\}\}$, et $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $\{a\}$ est un sous-espace affine de E. /1

c. Soit $A = \{a + u, u \in F\}$ un sous-espace affine et $(v, w) \in A^2$. Alors il existe $u_1 \in F$ tel que $v = a + u_1$ et $u_2 \in F$ tel que $w = a + u_2$. Donc $v - w = a + u_1 - (a + u_2) = u_1 - u_2 \in F$ car F est stable par combinaison linéaire. /1

d. Soit $A = \{a + u, u \in F\}$ et $\alpha \in A$. On procède par double inclusion : /1,5

- Si $v \in A$, comme α et v sont dans A, leur différence appartient à F d'après la question précédente, et on la note $u = v - \alpha \in F$. Alors $v = \alpha + u$ avec $u \in F$, autrement dit $v \in \{\alpha + u, u \in F\}$.
- Réciproquement, si $v \in \{\alpha + u, u \in F\}$, il existe $u \in F$ tel que $v = \alpha + u$. Mais comme α est dans $A = \{a + u, u \in F\}$, il existe aussi $\tilde{u} \in F$ tel que $\alpha = a + \tilde{u}$. Alors $v = \alpha + u = a + \tilde{u} + u$, or $\tilde{u} + u$ est bien dans F (qui est stable par combinaison linéaire) donc on a montré que $v \in A = \{a + u, u \in F\}$.

Alternative : comme $\alpha \in A$, il existe $u_\alpha \in F$ tel que $\alpha = a + u_\alpha$. On peut alors écrire

$$x \in A \iff \exists u \in F, x = a + u \underset{\substack{\text{avec } u = \tilde{u} + u_\alpha \\ u \in F \iff \tilde{u} \in F}}{\iff} \exists \tilde{u} \in F, x = \alpha + \tilde{u} \iff x \in \{\alpha + \tilde{u}, u \in F\}.$$

e. Si A est un sous-espace vectoriel, alors il contient 0_E. Réciproquement si A est un sous-espace affine de E qui contient 0_E, il existe a dans E et F un sous-espace vectoriel de E tels que $A = \{a + u, u \in F\}$, et d'après la question précédente avec $\alpha = 0_E$, on a également $A = \{0_E + u, u \in F\} = F$ donc A est un sous-espace vectoriel de E. /1,5

2. Dans cette question, on pose : $E = \mathbb{K}[X]$, $F = \{P \in E,\ P(1) = P(-1)\}$ et $A = \{P \in E,\ P(1) = 2 + P(-1)\}$.

a. Le polynôme nul appartient bien à F. Si P et Q sont des polynômes de F et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors /1

$$(P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) \underset{\text{car } P, Q \in F}{=} P(-1) + \lambda Q(-1) = (P + \lambda Q)(-1)$$

donc $P + \lambda Q \in F$ et on a montré que F est un sous-espace vectoriel de E.

b. On vérifie que pour $P = X$, $P(1) = 1 = 2 + P(-1)$. Donc $X \in A$. /1

c. On va montrer que $A = \{X + Q, Q \in F\}$ par double inclusion. /2

- Si $P \in A$, montrons que $P - X$ est dans F :

$$(P - X)(1) = P(1) - 1 \underset{\text{car } P \in A}{=} 2 + P(-1) - 1 = P(-1) + 1 = (P - X)(-1)$$

On a donc montré que $A \subset \{X + Q, Q \in F\}$.

- Si $P \in \{X + Q, Q \in F\}$, il existe $Q \in F$ tel que $P = X + Q$. Alors $P(1) = 1 + Q(1) \underset{\text{car } Q \in F}{=} 1 + Q(-1)$ et $2 + P(-1) = 2 - 1 + Q(-1) = 1 + Q(-1)$ donc P appartient bien à A. On a donc prouvé que $\{X + Q, Q \in F\} \subset A$.

3. Dans cette question, on pose : $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'ensemble des suites réelles),

$$F = \{u \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 8u_n = 0\} \text{ et } A = \{u \in E \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} - 8u_n = 10\}.$$

a. La suite nulle vérifie la propriété de récurrence définissant F. Si u et v sont des suites de F et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la suite $w = u + \lambda v$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: /2

$$w_{n+2} + 2w_{n+1} - 8w_n = u_{n+2} + 2u_{n+1} - 8u_n + \lambda(v_{n+2} + 2v_{n+1} - 8v_n) = 0$$

Donc F est bien un sous-espace vectoriel de E. On sait que les suites récurrentes linéaires d'ordre deux sont engendrées par des suites données par les racines de l'équation caractéristique $r^2 + 2r - 8 = 0$. Ici les racines sont évidentes, il s'agit de 2 et -4. On note $r_n = 2^n$ et $s_n = (-4)^n$ ces deux suites : montrons qu'elles forment une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda_1 r + \lambda_2 s = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. Alors en évaluant cette égalité pour $n = 0$ et $n = 1$ on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = 0 \quad (n = 0) \\ \lambda_1 2 + \lambda_2(-4) & = 0 \quad (n = 1) \end{cases}$$

ce qui donne rapidement $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. La famille est libre, et engendre F, c'est donc une base de F.

b. Si u est une suite de A qui converge vers ℓ, par passage à la limite dans la relation définissant A on obtient $\ell + 2\ell - 8\ell = 10$, autrement dit $\ell = -2$. Remarquons que l'ensemble A contient la suite constante de valeur -2, qu'on va noter $-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$. /1

c. On va montrer que $A = \{-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u, u \in F\}$. Comme $-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} \in A$ et F est un sous-espace vectoriel, cela montrera que A est un sous-espace affine de E. On procède à nouveau par double inclusion : /3

- Si $v \in A$, montrons que $v + 2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$ est dans F : si $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+2} + 2 + 2(v_{n+1} + 2) - 8(v_n + 2) = v_{n+2} + 2v_{n+1} - 8v_n - 10 = 0 \text{ car } v \in A$$

donc $v + 2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}}$ est bien dans F. On a donc montré que $A \subset \{-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u, u \in F\}$.

- Si $v \in \{-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u, u \in F\}$, il existe $u \in F$ tel que $v = -2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u$. Alors si $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2}+2v_{n+1}-8v_n = (-2+u_{n+2})+2(-2+u_{n+1})-8(-2+u_n) = 10-(u_{n+2}+2u_{n+1}-8u_n) = 10 \text{ car } u \in F$$

donc v appartient bien à A. On a donc prouvé que $\{-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u, u \in F\} \subset A$.

Comme $A = \{-2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + u, u \in F\}$ et qu'on connaît une base (s, r) de F, les suites de A sont de la forme $u = -2_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} + \alpha r + \beta s$ avec α et β des réels, autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -2 + \alpha 2^n + \beta(-4)^n.$$

En bonus :

Exercice 7. 1. a. Si $x = 1$, l'égalité est vérifiée. Si $x \neq 1$, on reconnaît une somme géométrique : /1

$$1 + x + \cdots + x^{m-2} + x^{m-1} = \frac{1 - x^m}{1 - x},$$

d'où le résultat.

b. D'après (a), $x^m - 1$ est divisible par $x - 1$. Comme x et m sont supérieurs à 2, c'est un diviseur strict. Or, si $x \geqslant 3$, alors $x - 1 \geqslant 2$, donc $x^m - 1$ n'est pas premier. Donc, par contraposée, si $x^m - 1$ est premier, alors $x = 2$. /1

2. a. D'après la formule du 1(a) appliquée à $x = 2^p$ et $m = q$, $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$. /1

b. Supposons m non premier. Il existe alors p et q supérieurs ou égaux à 2 tels que $m = pq$, donc, d'après (a), $2^m - 1$ est divisible par $2^p - 1$. C'est un diviseur strict et supérieur à 2, donc $2^m - 1$ n'est pas premier. D'où, par contraposée, le résultat voulu. /1

c. On remarque que les puissances de 2 ont pour chiffre des unités 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6... de sorte que $2^m - 1$ a pour chiffre des unités 3 ou 5 lorsque m est pair. Si $2^m - 1$ est premier, alors m est premier d'après la question précédente, donc si $m \geqslant 3$ il n'est pas pair, et le chiffre des unités de $2^m - 1$ est alors 1 ou 7. /3

3. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$. Alors : /3

$$u_a = x^a - 1 = x^{bq+r} - 1 = (x^{bq} - 1)x^r + x^r - 1,$$

donc, d'après la formule du 1(a) appliquée à x^b et $m = q$:

$$u_a = u_b(x^{b(q-1)} + x^{b(q-2)} + \cdots + 1)x^r + u_r.$$

Or $0 \leqslant r \leqslant b - 1$, donc $0 \leqslant u_r \leqslant x^{b-1} - 1 \leqslant u_b - 1$. Donc u_r est bien le reste de la division euclidienne de u_a par u_b.