DS n°8

L'usage de tout matériel électronique, y compris calculatrices et téléphones portables, est interdit.
La présentation, la qualité de rédaction et la précision des raisonnements sont évaluées.
Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
*Ce sujet contient **3 pages**.*
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

Exercice 1. Calculer les quantités suivantes (en justifiant leur existence) :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k - 1}{\sqrt{3}^{2k-1}} \qquad \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^5}{k^3+n^3} \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k!} (\star\star)$$

Pour la dernière somme, P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, et on exprimera le résultat en fonction de ses coordonnées dans la base $(1, X, X(X-1), \dots, X(X-1)\cdots(X-n+1))$.

Exercice 2. Calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\displaystyle\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

1. a. Justifier que la fonction φ est bien définie.

   b. Montrer que $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$ puis que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-x}$.

   c. En déduire la limite de la fonction φ en $+\infty$.

2. Soit $t \in [0,1]$. On définit $f_t : x \mapsto \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}$.

   a. Montrer que f_t est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in [-1,1]$, $|f_t''(x)| \leqslant 4\mathrm{e}^2$.

   b. À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $h \in [-1,1]$,
$$\left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leqslant 2\mathrm{e}^2 h^2.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $h \in [-1,1]$.

   a. Simplifier $\displaystyle\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$ sous forme d'une seule intégrale.

   b. Montrer que
$$\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\mathrm{e}^2 h^2 \varphi(x).$$

   c. En déduire que φ est dérivable en x et que $\displaystyle\varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

   d. Montrer, pour $x > 0$ et à l'aide d'un changement de variable affine, que $\displaystyle\varphi'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$.

4. On note $\displaystyle G : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

   a. Déterminer la dérivée de G.

   b. Montrer que la fonction $x \mapsto \varphi(x^2) + G(x)^2$ est constante sur $\mathbb{R}_+$.

   c. En déduire la limite de G en $+\infty$, c'est-à-dire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 3. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \right) \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}$ converge-t-elle ?

Exercice 4. Étude d'endomorphismes nilpotents et de leur commutant.

Partie I. On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f : (x, y, z) \mapsto (-x - 2y - 3z, 2y + 4z, x - z)$$

1. a. Montrer que f est linéaire, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

   b. Déterminer une base du noyau de f.

   c. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis en donner une base.

2. On note $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et on rappelle que $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$.

   a. Déterminer une base de H et donner sa dimension.

   b. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2(x, y, z) = 2(x + y + z).(-1, 2, -1)$.

   c. En déduire une base de $\ker(f^2)$ et de $\mathrm{Im}(f^2)$.

3. Montrer que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$.

4. On définit le vecteur $u = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

   a. Montrer que $u \notin \ker(f^2)$.

   b. Calculer les vecteurs $f(u)$ et $f^2(u)$ et montrer que la famille $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. On cherche à déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f, que l'on note $C(f)$, c'est-à-dire :
$$C(f) = \big\{h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid h \circ f = f \circ h\big\}$$

   a. Montrer que $C(f)$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et qu'il contient les endomorphismes $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, f et f^2.

   b. Montrer que l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ définit par $g : (x, y, z) \mapsto (y + 2z, 2x - 2z, -2x - y)$ appartient à $C(f)$.

   c. Soit $h \in C(f)$. On note α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ les coordonnées de $h(u)$ dans la base $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$, c'est-à-dire
$$h(u) = \alpha.u + \beta.f(u) + \gamma.f^2(u).$$
   Montrer que pour tout $v \in \mathbb{R}^3$, $h(v) = \alpha.v + \beta.f(v) + \gamma.f^2(v)$.

   d. Conclure que $C(f) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\big)$ et que $C(f)$ est de dimension 3.

Partie II. On note E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et on considère un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent d'indice p lorsque $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

6. Quel est l'indice de nilpotence de l'endomorphisme f étudié dans la partie I ?

7. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est nilpotent d'indice p.

   a. Justifier qu'il existe un vecteur $u \in \ker(f^p) \setminus \ker(f^{p-1})$.

   b. Montrer que pour un tel vecteur u, la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\big)$ est libre.

   c. Conclure que $p \leqslant n$, c'est-à-dire que l'indice de nilpotence est toujours plus petit que la dimension de l'espace.

8. On suppose dans que cette question que $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice $n = \dim(E)$. En s'inspirant de la question 5, déterminer la dimension de l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f.

Exercice 5. On s'intéresse dans cet exercice à la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $w_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.

   a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $w_n - w_{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1}$.

   b. Déterminer un équivalent simple de $w_n - w_{n+1}$.

   c. Conclure que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}(w_n - w_{n+1})$ est convergente, puis que la suite (w_n) converge.
   On note γ la limite de la suite (w_n), appelée constante d'Euler.

2. a. Donner le tableau de variations de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$.

   b. Déterminer une primitive Φ de la fonction φ. *Indication : φ est de la forme $u'u$.*

3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

   a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $S_{2n+2} - S_{2n}$ à l'aide de φ puis en déduire les variations de $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$.

   b. Étudier les variations de $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ et conclure que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

   c. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   d. Déterminer, en justifiant, si cette série est absolument convergente.

4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\right) - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}$.

   a. Justifier que pour tout entier $k \geqslant 3$, on a : $\dfrac{\ln(k+1)}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$.

   b. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$,
$$v_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\big(\ln(n)\big)^2}{2}.$$

   c. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.

   d. Justifier l'équivalent, quand $n \to \infty$, suivant : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \sim \frac{1}{2}\big(\ln(n)\big)^2$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $S_{2n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}$, puis que
$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n).$$

6. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 6 (Bonus)**.** Soit $T \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{P}_T$ l'ensemble des suites *complexes*[1] périodiques de période T.

1. Déterminer la dimension de $\mathcal{P}_T$ en exhibant une base.

2. Si $\mathbb{U}_T$ désigne l'ensemble des racines T-ièmes de l'unité, montrer que $((\omega^n)_{n\in\mathbb{N}})_{\omega\in\mathbb{U}_T}$ est une base de $\mathcal{P}_T$.

1. il y avait une erreur dans l'énoncé !