DS n°8 - Correction

Exercice 1. ▸ Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{2^k-1}{\sqrt{3}^{2k-1}} = \sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \sqrt{3}\frac{1}{3^k}$ donc la série converge, comme combinaison linéaire de séries géométriques de raisons strictement inférieures en module à 1. Le calcul donne : /2

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k-1}{\sqrt{3}^{2k-1}} = \sqrt{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{3}\left(2-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{2}.}$$

▸ Pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \dfrac{\ln k - \ln(k+1)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \dfrac{1}{\ln(k+1)} - \dfrac{1}{\ln(k)}$ donc la série est télescopique. /2

Comme $\frac{1}{ln(k)}$ tend vers 0, la série converge donc, et sa somme vaut $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \boxed{-\dfrac{1}{\ln(2)}.}$

▸ C'est une somme de Riemann ! Pour tout $n \in \mathbb{N}$: /3

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{k^5}{n^5}}{1+\frac{k^3}{n^3}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avec $f : x \mapsto \frac{x^5}{1+x^3}$ qui est bien continue sur $[0,1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^5}{k^3+n^3} = \int_0^1 f = \int_0^1 \frac{x^5}{1+x^3}dx = \int_0^1\left(x^2 - \frac{x^2}{1+x^3}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ln(1+x^3)\right]_0^1 = \boxed{\frac{1-\ln(2)}{3}.}$$

▸ On note $P_i = \prod_{j=1}^{i}(X-j+1)$, avec la convention $P_0 = 1$. Les P_i sont alors de degré i, donc échelonnés en degré, et il y en a $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc ils forment bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On décompose P dans cette base : il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ tel que $P = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i P_i$. Pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, et N grand, on a /3

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{P_i(k)}{k!} = \sum_{k=i}^{N}\frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{k!} = \sum_{k=i}^{N}\frac{1}{(k-i)!} = \sum_{k=0}^{N-i}\frac{1}{k!} \to \mathrm{e}.$$

Donc comme $P = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i P_i$, la série considérée converge comme combinaison linéaire de séries convergentes, et sa somme vaut :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P(k)}{k!} = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P_i(k)}{k!} = \boxed{\mathrm{e}\sum_{i=0}^{n}\alpha_i.}$$

Exercice 2.

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction intégrée $f : t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction admet donc des primitives (théorème fondamental de l'analyse), et si l'on note F l'une d'entre elle, on a $\varphi(x) = F(1) - F(0)$. /1

   Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ est bien défini sur } \mathbb{R}.}$

   b. Premièrement, /1,5

$$\varphi(0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-0}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

   Puis, pour $x \geqslant 0$ et $t \in [0,1]$, on a $-x(1+t^2) \leqslant -x$, donc $\mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et donc $\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}$. Ainsi, par croissance de l'intégrale, on obtient puisque toutes ces quantités sont positives :

$$0 \leqslant \varphi(x) = \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\frac{\pi}{4}.$$

c. On sait que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ et, par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0.}$ /0,5

2. a. La fonction $x \mapsto -x(1+t^2)$ est une fonction affine, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction exponentielle (elle aussi $\mathcal{C}^\infty$), on en déduit que f_t est $\mathcal{C}^\infty$ (donc en particulier $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}$. /2
Ensuite, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_t'(x) = -(1+t^2)\mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{f_t''(x) = \left(1+t^2\right)^2 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}.}$$

Ensuite, comme $t \in [0,1]$, on a $1+t^2 \leqslant 2$ et donc $\left(1+t^2\right)^2 \leqslant 4$. Et pour $x \in [-1,1]$, on a $-x \leqslant 1$ donc $-x(1+t^2) \leqslant 2$ et donc $\mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \leqslant \mathrm{e}^2$. Par produit d'inégalités (où tous les termes sont positifs), on en déduit

$$\left|f_t''(x)\right| = \left(1+t^2\right)^2 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)} \boxed{\leqslant 4\mathrm{e}^2.}$$

b. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à f_t à l'ordre 2 (ce qui est possible car f_t est $\mathcal{C}^2$) entre 0 et $h \in [-1,1]$, avec $M = 4\mathrm{e}^2$ qui est un majorant de $|f_t''|$ sur $[-1,1]$ (cf. question précédente) : /1

$$\left|f_t(h) - f_t(0) - hf_t'(0)\right| \leqslant M\frac{h^2}{2}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right| \leqslant 2e^2h^2.}$$

3. a. Par linéarité de l'intégrale /1

$$\begin{aligned}\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-(x+h)(1+t^2)}}{1+t^2} - \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} - h\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\left(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

b. D'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales et les résultats des questions 2b et 3a : /2

$$\begin{aligned}\left|\varphi(x+h) - \varphi(x) + h\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \underbrace{\left|\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 + h(1+t^2)\right|}_{\leqslant 2e^2h^2}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} 2e^2h^2\mathrm{d}t = 2e^2h^2\varphi(x).\end{aligned}$$

c. À partir de la question précédente et en divisant par $|h|$ (pour $h \in [-1,1]\backslash\{0\}$) on obtient /1

$$\left|\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{2e^2h^2\varphi(x)}{|h|} = 2e^2|h|\varphi(x) \xrightarrow[h\to 0]{} 0,$$

donc par encadrement, ceci implique que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

On en conclut que φ est dérivable en x, de dérivée $\boxed{\varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t.}$

d. Supposons $x > 0$. On effectue le changement de variable « $u = \sqrt{x}t$ », c'est-à-dire que l'on définit $\psi(u) = \frac{u}{\sqrt{x}}$, et donc ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \sqrt{x}]$ avec $\psi'(u) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\psi(0) = 0$ et $\psi(\sqrt{x}) = 1$: /1

$$\varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}t = -\int_{\psi(0)}^{\psi(\sqrt{x})} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-x(\frac{u}{\sqrt{x}})^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}u = \boxed{-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.}$$

4. a. La fonction G est une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$, donc G est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{G'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.}$ /0,5

b. La dérivée de la fonction $f : x \mapsto \varphi(x^2) + G(x)^2$ est $f' : x \mapsto 2x\varphi'(x^2) + 2G'(x)G(x)$. Or pour $x > 0$, /1,5

$$f'(x) = 2x\varphi'(x^2) + 2G'(x)G(x) = -2x\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{x^2}}\int_0^{\sqrt{x^2}} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = 0.$$

Comme f' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction fonction f est continue, on en déduit que f est constante sur $\mathbb{R}_+$.

c. D'après la question précédente, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x^2) + G(x)^2 = \varphi(0) + G(0)^2 = \frac{\pi}{4} + 0$. /1
En passant à la limite, en sachant que $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)^2 = \frac{\pi}{4}$, et enfin, comme $G(x)$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Exercice 3. Déterminons un équivalent du terme général de la série considérée : /4

- $\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}}$,
- $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} \exp\left((n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}\cdot\exp\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$
- $$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \exp\left(n\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) \underset{n\to\infty}{=} \exp\left(n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{n}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Ainsi, le terme général est équivalent à $\boxed{\frac{\mathrm{e}}{n^{1+2\alpha}}}$, en particulier il est positif à partir d'un certain rang.

- Si $\alpha > 0$, $\frac{\mathrm{e}}{n^{1+2\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, et par comparaison entre série à termes positifs, la série considérée converge.
- Si $\alpha \leqslant 0$, $\frac{\mathrm{e}}{n^{1+2\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente, et par comparaison entre série à termes positifs, la série considérée diverge.

Exercice 4.

1. a. Soit $u = (x, y, z)$ et $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a /1

$$\begin{aligned} f(u + \lambda v) &= f\big((x + \lambda a, y + \lambda b, z + \lambda c)\big) \\ &= (-x - \lambda a - 2y - 2\lambda b - 3z - 3\lambda c, 2(y + \lambda b) + 4(z + \lambda c), x + \lambda a - z - \lambda c) \\ &= (-x - 2y - 3z, \dots, \dots) + \lambda(-a - 2b - c, \dots, \dots) \\ &= f(u) + \lambda f(v). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est linéaire.}}$

b. Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, /1,5

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff f\big((x,y,z)\big) = (0,0,0)$$
$$\iff \begin{cases} -x-2y-3z=0 \\ 2y+4z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-2z \\ z=z \end{cases} \iff (x,y,z) = z.(1,-2,1).$$

Ainsi, $\boxed{\ker(f) = \text{Vect}\,\big((1,-2,1)\big).}$ La famille $\big((1,-2,1)\big)$ est libre (un seul vecteur non nul) et génératrice de $\ker(f)$, donc c'est une base de $\ker(f)$.

c. D'après la question précédente, on a $\dim\big(\ker(f)\big) = 1$ et le théorème du rang appliqué à f donne donc /1,5

$$\dim\big(\text{Im}(f)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim\big(\ker(f)\big) = 3-1 \boxed{= 2.}$$

Ensuite $f\big((1,0,0)\big) = (-1,0,1)$ et $f\big((0,1,0)\big) = (-2,2,0)$, donc $\big((-1,0,1),(-2,2,0)\big)$ est une famille libre (car deux vecteurs non colinéaires) de deux vecteurs de $\text{Im}(f)$, et comme $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, on en déduit que $\boxed{\big((-1,0,1),(-2,2,0)\big) \text{ est une base de Im}(f).}$

Remarque. On aurait pu choisir d'autres vecteurs, par exemple $f(1,0,0)$ et $f(0,0,1) = (-3,4,-1)$ forment aussi une base de $\text{Im}(f)$.

2. a. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, /1

$$(x,y,z) \in H \iff x+y+z=0 \iff \begin{cases} x=-y-z \\ y=y \\ z=z \end{cases} \iff (x,y,z) = y.(-1,1,0) + z.(-1,0,1)$$

Ainsi, $\boxed{H = \text{Vect}\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big) \text{ et } \dim(H) = 2.}$

b. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, /0,5

$$\begin{aligned} f^2\big((x,y,z)\big) &= f\big(-x-2y-3z, 2y+4z, x-z)\big) \\ &= \big(x+2y+3z-2(2y+4z)-3(x-z), 2(2y+4z)+4(x-z), -x-2y-3z-(x-z)\big) \\ &= (-2x-2y-2z, 4x+4y+4z, -2x-2y-2z) \\ &= 2(x+y+z).(-1,2,-1) \end{aligned}$$

c. On a $\quad (x,y,z) \in \ker(f^2) \Leftrightarrow x+y+z=0 \Leftrightarrow (x,y,z) \in H \quad$ donc $\ker(f^2) = H$ et d'après la question (a), /1,5
$\boxed{\big((-1,1,0),(-1,0,1)\big) \text{ est une base de } \ker(f^2).}$
D'après le théorème du rang pour l'application f^2, on a $\dim(\text{Im}(f^2)) = 3 - \dim(\ker(f^2)) = 3-2 = 1$, et comme $f\big((\frac{1}{2},0,0)\big) = (-1,2,-1)$ la famille $\boxed{\big((-1,2,-1)\big) \text{ est une base de Im}(f^2).}$

3. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, /1

$$f^3\big((x,y,z)\big) = f\big(2(x+y+z).(-1,2,-1)\big) = 2(x+y+z)f\big((-1,2,-1)\big) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

en utilisant le fait que $(-1,2,-1) \in \text{Vect}\big((1,-2,1)\big) = \ker(f)$. Ainsi, $\boxed{f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.}$

4. a. On a $f^2(u) = 6.(-1,2,-1) \neq (0,0,0)$ donc $\boxed{u \notin \ker(f^2).}$ /0,5

b. On a $f(u) = (-6,6,0)$ et $f^2(u) = (-6,12,-6)$. Montrons que la famille $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est libre : pour $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a /1,5

$$\lambda_1.u + \lambda_2.f(u) + \lambda_1.f^2(u) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 6\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 6\lambda_2 + 12\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 \qquad - 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 6\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ 12\lambda_2 + 18\lambda_3 = 0 \\ 6\lambda_2 \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, la famille $\big(u, f(u), f^2(u)\big)$ est libre et composée de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ vecteurs, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. a. Premièrement, $\underline{C(f) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est un espace vectoriel. De plus, $f \circ 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \circ f$, donc $\underline{0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \in C(f)}$. /1
Ensuite, pour h_1 et $h_2 \in C(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$(h_1 + \lambda h_2) \circ f = h_1 \circ f + \lambda h_2 \circ f = f \circ h_1 + \lambda f \circ h_2 = f \circ (h_1 + \lambda h_2).$$

Ainsi, $\underline{h_1 + \lambda h_2 \in C(f)}$.
Justifications. Première égalité : distributivité de la composition sur la somme d'applications linéaire. Deuxième égalité : on utilise le fait que h_1 et h_2 commutent avec f pour changer l'ordre des compositions ($f \circ h_1 = h_1 \circ f$). Troisième égalité : linéarité de f.
Conclusion : $\boxed{C(f) \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^3).}$
Ensuite, on a

$$f \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} \circ f, \qquad f \circ f = f^2 = f \circ f \quad \text{et} \quad f^2 \circ f = f^3 = f \circ f^2$$

ce qui justifie que $\boxed{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3},\ f \text{ et } f^2 \text{ appartiennent à } C(f).}$

b. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a /1

$$f \circ g\big((x, y, z)\big) = \cdots = -2(x + y + z).(-1, 2, -1)$$

et

$$g \circ f\big((x, y, z)\big) = \cdots = -2(x + y + z).(-1, 2, -1)$$

donc $f \circ g = g \circ f (= -f^2)$, c'est-à-dire $g \in C(f)$.

c. Par linéarité de h, il suffit de vérifier la relation pour les vecteurs de la base $(u, f(u), f^2(u))$. Pour u, c'est la relation initiale $h(u) = \alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u)$. Pour $f(u)$, on a : /2

$$h(f(u)) = f(h(u)) = f(\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u)) = \alpha f(u) + \beta f(f(u)) + \gamma f(f^2(u)).$$

La première égalité utilise le fait que h et f commutent, et la troisième la linéarité de f. De même,

$$h(f^2(u)) = f^2(h(u)) = f^2(\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u)) = \alpha f^2(u) + \beta f(f^2(u)) + \gamma f^2(f^2(u),$$

et on conclut grâce à la linéarité de h que $h = \alpha \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \beta f + \gamma f^2$, puisque ces deux applications linéaires coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$.

d. Comme $C(f)$ est un espace vectoriel, et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$, f et f^2 sont dans $C(f)$, on a $\underline{\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2) \subset C(f)}$ car un espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. /2
Ensuite, si $h \in C(f)$, d'après la question précédente, il existe α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $h = \alpha \,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + \beta f + \gamma f^2$, donc $h \in \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)$, ce qui montre l'autre inclusion : $\underline{C(f) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2)}$.
Ainsi, par double inclusion, on a montré que $\boxed{C(f) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\big).}$
De plus, $\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\big)$ est une <u>famille libre</u>, car une relation de liaison entre ces trois applications linéaires donne en particulier une relation de liaison entre u, $f(u)$ et $f^2(u)$, qui est alors triviale puisqu'on a montré que cette famille est libre. Ainsi, $\big(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}, f, f^2\big)$ est une base de $C(f)$, qui est donc de <u>dimension 3</u>.

6. L'endomorphisme f étudié dans la partie I vérifie $f^3 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$ et $f^2 \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$, donc $\boxed{f \text{ est nilpotent d'indice 3.}}$ /1

7. a. On sait que $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\underline{\ker(f^p) = E}$ (puisque tous les vecteurs de E ont une image nulle). Et $\underline{\ker(f^{p-1}) \neq E}$ puisque f^{p-1} n'est pas l'application nulle. Donc il existe un vecteur de E qui n'est pas dans $\ker(f^{p-1})$, c'est a dire : $\boxed{\exists u \in E \backslash \ker(f^{p-1}).}$ /1

b. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\underline{\lambda_1 u + \lambda_2 f(u) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(u) = 0_E}$ $(\star)$. /2
En appliquant f^{p-1} à l'égalité $(\star)$, on obtient

$$\lambda_1 f^{p-1}(u) + \underbrace{\lambda_2 f^p(u) + \cdots + \lambda_p f^{2p-1}(u)}_{=0_E \text{ car } f^p = f^{p+1} = \cdots = 0_{\mathcal{L}(E)}} = f^{p-1}(0_E) = 0_E$$

c'est-à-dire $\lambda_1 f^{p-1}(u) = 0_E$, et comme $f^{p-1}(u) \neq 0_E$, car $u \notin \ker(f^{p-1})$, on en déduit que $\underline{\lambda_1 = 0.}$
On répète le même raisonnement en appliquant cette fois f^{p-2} à l'égalité $(\star)$ (et en utilisant le fait que $\lambda_1 = 0$) :

$$\lambda_2 \underbrace{f^{p-1}(u)}_{\neq 0_E} + \underbrace{\lambda_3 f^p(u) + \cdots + f^{2p-2}(u)}_{=0_E} = f^{p-2}(0_E) = 0_E,$$

donc $\underline{\lambda_2 = 0.}$
En répétant le même raisonnement (en appliquant f^{p-3}, ...) on déduit que $\boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0.}$
Ainsi, la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\big)$ est libre.

c. Une famille libre contient toujours moins de vecteurs que la dimension de l'espace, donc /1

$$p = \left|\big(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\big)\right| \leqslant \dim(E) = n.$$

8. Soit f une application linéaire d'indice de nilpotence maximal $n = \dim E$. D'après 7a et b, il existe $u \in E$ tel que $(u, f(u), \cdots, f^{n-1}(u))$ soit une base de E (famille libre de cardinal $n = \dim E$). /3
Si $h \in C(f)$, on note $(\alpha_0, \cdots \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ le coordonnées de $h(u)$ dans cette base.
On montre comme en 5c que $h = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i$, en vérifiant l'égalité pour chaque vecteur de la base : si $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$h(f^k(u)) = f^k(h(u)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(u)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(f^k(u))$$

puisque h commute aussi avec f^k, qui est linéaire, et $f^k \circ f^i = f^i \circ f^k$.
On a donc montré que pour tout $h \in C(f)$, h s'écrit comme combinaison linéaire de $\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}$.
L'autre inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$ découle du fait que toutes les puissances de f commutent avec f. On a donc l'égalité $\boxed{C(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).}$
Cette famille génératrice est libre, puisque comme en 5c, une relation de liaison entre ces applications induit une relation de liaison sur la famille libre $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$. On a donc exhibé une base de $C(f)$, qui est donc de $\underline{\text{dimension } n}$.

Exercice 5. 1. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, /1

$$w_n - w_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

b. Comme $\frac{1}{n} \to 0$, on a $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand $n \to \infty$, d'où /2

$$w_n - w_{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puisque $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ (par équivalence). On a donc $\boxed{w_n - w_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.}$

c. La série $\sum \frac{1}{k^2}$ est convergente (série de Riemann avec $2 > 1$), donc par linéarité et comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\boxed{\sum(w_k - w_{k+1}) \text{ est convergente.}}$ /2

Or, les sommes partielles de cette série se calculent par télescopage : pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(w_k - w_{k+1}) = w_1 - w_{n+1}$, et donc la suite (w_n) converge.

2. a. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}\ln(t) + \frac{1}{t} \times \frac{1}{t} = \frac{1-\ln(t)}{t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Ainsi, $\varphi'(t)$ est du signe de $1 - \ln(t)$ ce qui permet d'obtenir le tableau de variations suivant : /1

t	0		e		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

La limite en 0 s'obtient par produit de limites, et celle en $+\infty$ est une limite usuelle de croissances comparées.

b. La fonction $\Phi : t \mapsto \frac{\ln(t)^2}{2}$ est une primitive de φ sur $]0, +\infty$. /1

3. a. Pour $n \geqslant 1$, /1

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} u_k - \sum_{k=1}^{2n} u_k = u_{2n+2} + u_{2n+1} = \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \varphi(2n+2) - \varphi(2n+1).$$

Or la fonction φ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ et $2n+2 \geqslant 2n+1 \geqslant 3 \geqslant \mathrm{e}$, donc $\varphi(2n+2) \leqslant \varphi(2n+1)$.
On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n+2} - S_{2n} \leqslant 0$, autrement dit, $\boxed{\text{la suite } (S_{2n}) \text{ est décroissante.}}$

b. Pour $n \geqslant 1$, /1

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = -\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} = -\varphi(2n+3) + \varphi(2n+2).$$

Comme φ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, on en déduit que $S_{2n+3} - S_{2n+1} \geqslant 0$, et donc $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est croissante.}}$
Enfin, $S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1} = -\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) vérifient : l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux tend vers 0, ce sont donc $\boxed{\text{deux suites adjacentes.}}$

c. D'après la propriété des suites adjacentes, (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, que l'on note S. /1
Cela signifie que pour la suite (S_n), ses termes de rang pair et de rang impair convergent vers la même limite S. Comme ces deux suites extraites recouvrent entièrement (S_n), cela implique que (S_n) converge également vers S.
Comme (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_k$, et que l'on a montré que cette suite converge, cela signifie que $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} u_k \text{ est une série convergente.}}$

d. Pour étudier la convergence absolue, on remarque que pour $k \geqslant 1$ /1

$$|u_k| = \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et donc} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{\ln(k)}|u_k| = \underset{k\to\infty}{o}(|u_k|)$$

Comme $\sum \frac{1}{k}$ est une série divergente (série harmonique), on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum |u_k|$ est divergente. Ainsi, $\boxed{\sum_{k\geqslant 1} u_k \text{ ne converge pas absolument.}}$

4. a. Soit $k \geqslant 3$. D'après la question 2, la fonction φ est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$, donc en particulier sur $[k, k+1]$. Ainsi, $\forall t \in [k, k+1]$, $\varphi(k+1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(k)$ et par croissance de l'intégrale, en intégrant sur un intervalle de taille 1, on obtient /1

$$\varphi(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(k).$$

b. En sommant l'inégalité de droite de $k = 3$ jusqu'à $k = n$ et en appliquant la relation de Chasles, on obtient /1

$$\int_3^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$$

d'où

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \frac{1}{2}\ln(n)^2 \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\ln(n)^2.$$

c. En reconnaissant la primitive Φ calculée en 2b, on voit que pour $n \geqslant 3$, /2

$$v_{n+1} - v_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} = \varphi(n+1) - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \text{ d'après 4a.}$$

Ainsi, $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante.}}$ Il reste à montrer que la suite (v_n) est minorée pour pouvoir conclure qu'elle converge (par convergence monotone). En utilisant à nouveau la primitive Φ, on minore :

$$v_n \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \int_3^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\ln(n)^2 = \frac{\ln(2)}{2} + \Phi(n+1) - \Phi(3) - \Phi(n) \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \Phi(3)$$

par croissance de Φ. Comme (v_n) est minorée par $\frac{\ln(2)-\ln(3)^2}{2}$, et décroissante, elle est convergente.

d. Comme v_n converge vers une limite finie, que l'on note ici ℓ, on a /1

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{1}{2}\ln(n)^2 + \underbrace{\ell + o(\ell)}_{=o(\ln(n)^2)}.$$

d'où l'équivalent demandé.

5. Pour $n \geqslant 1$, on a /3

$$S_{2n} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \big((-1)^k + 1\big)\frac{\ln(k)}{k} = \sum_{i=1}^{n} 2\frac{\ln(2i)}{2i} + \sum_{j=0}^{n-1} 0 = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k}.$$

Après avoir utilisé la linéarité, on a séparé les termes de rangs pairs et de rangs impairs (qui sont nuls) de la somme. Ensuite,

$$\begin{aligned}
S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2)+\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} &= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n + \frac{\ln(n)^2}{2} - v_{2n} - \frac{\ln(2n)^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} + \frac{\ln(n)^2 - \big(\ln(n)+\ln(2)\big)^2}{2} \\
&= \ln(2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \ln(2)\ln(n) - \frac{\ln(2)^2}{2}
\end{aligned}$$

6. Comme la suite (v_n) converge, et en notant ℓ sa limite, on a $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$. Cela donne donc, à partir des calculs de la question précédente, /1

$$S_{2n} = \ln(2)\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\Big) + v_n - v_{2n} - \frac{\ln(2)^2}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln(2)\gamma + \ell - \ell - \frac{\ln(2)^2}{2} = \ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}$$

où l'on a utilisé la convergence de (w_n) vers γ, question 1c. Par ailleurs, S_{2n} étant une somme partielle de la série $\sum u_k$ qui est convergente, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \boxed{\ln(2)\gamma - \frac{\ln(2)^2}{2}.}$$

Exercice 6. Soit $T \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{P}_T$ l'ensemble des suites complexes périodiques de période T.

1. On peut montrer que l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_T & \longrightarrow & \mathbb{C}^T \\ u & \longmapsto & (u_0, \cdots, u_{T-1}) \end{array} \right.$ est linéaire et bijective, donc $\dim \mathcal{P}_T = \dim \mathbb{C}^T = T$. Une base de $\mathcal{P}_T$ est donnée par l'image réciproque par cette application de la base canonique de $\mathbb{C}^T$: c'est la base composée des suites T-périodiques qui valent 1 en un seul rang inférieur à $T-1$ et 0 pour les autres rangs inférieurs à $T-1$.

2. Si $\mathbb{U}_T$ désigne l'ensemble des racines T-ièmes de l'unité, alors pour $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{T}}$, $\mathbb{U}_T = \{\omega^k, k \in [\![0, T-1]\!]\}$. On note alors u^k la suite donnée par pour tout $n \geqslant 0$, $u_n^k = \omega^{kn}$, qui est périodique de période T puisque $\omega^T = 1$.
   Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{T-1}) \in \mathbb{C}^{T-1}$ tels que $\lambda_0 u^0 + \cdots + \lambda_{T-1} u^{T-1} = 0_{\mathbb{C}^\mathbb{N}}$.
   Alors en particulier, pour tout $n \in [\![0, T-1]\!]$,
   $$\lambda_0 u_n^0 + \lambda_1 u_n^1 + \lambda_2 u_n^2 + \cdots + \lambda_{T-1} u_n^{T-1} = \lambda_0 \omega^0 + \lambda_1 \omega^n + \lambda_2 (\omega^n)^2 + \cdots + \lambda_{T-1} (\omega^n)^{T-1} = 0.$$
   On considère alors le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_{T-1} X^{(T-1)}$, qui est de degré inférieur à T. D'après ce qui précède, les ω^n sont racines de P, pour tout $n \in [\![0, T-1]\!]$. Ces racines sont toutes distinctes, et il y en a donc plus que le degré de P : ceci implique que P est le polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls.
   On a ainsi prouvé la liberté de la famille de suites considérée. Comme c'est une famille composée de T éléments, c'est donc une autre base de $\mathcal{P}_T$, qui est de dimension T d'après la question précédente.