DS n°9

Durée : 4 heures.

Consignes de présentation :

- Tout résultat ou raisonnement doit être clairement justifié, sauf mention du contraire.
- La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.
- La présentation de la copie sera prise en compte dans l'évaluation. Il vous est demandé :
  - d' $\boxed{\text{encadrer}}$ les résultats principaux,
  - de souligner les résultats et arguments intermédiaires importants,
  - de soigner votre écriture,
  - de maintenir une marge dans vos copies et d'aérer vos copies,
  - de numéroter vos copies et de les rendre dans l'ordre, la première servant de chemise pour les suivantes, qui ne seront pas imbriquées les unes dans les autres.
- Les documents, calculatrices et autres appareils électroniques sont interdits.

Voici les six critères qui seront évalués :

1. lisibilité de l'écriture
2. respect de la langue
3. clarté de l'expression
4. propreté de la copie
5. identification des questions
6. mise en évidence des résultats

Deux critères non satisfaits → $-3,3\%$ de retrait sur la note finale.
Quatre critères non satisfaits → $-6,6\%$ de retrait...

Il est conseillé de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Ce sujet contient **4 pages**.
On peut admettre le résultat d'une question et poursuivre l'exercice.

⚠ Il est demandé de ne traiter qu'**un des deux exercices** 3 et 4 (d'algèbre linéaire), à moins d'avoir traité très sérieusement tout le reste du sujet.

Vrai/Faux. Si c'est vrai, prouvez-le ! sinon, donnez un contre-exemple.

1. La série de terme général $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n^2}$ est convergente.

2. Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ des suites à valeurs réelles.
La série de terme général u_n converge si et seulement si les séries de terme général $u_n + v_n$ et de terme général v_n convergent toutes deux.

3. Si E est un espace vectoriel et $f : E \to E$ est un endomorphisme injectif, alors il est bijectif.

4. Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec E et F des espaces vectoriels de même dimension finie.
Alors f est surjective si et seulement si $\ker f = \{0_E\}$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre.
Alors leur somme suit une loi de Bernoulli avec ce paramètre.

6. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles sur un même univers fini.
Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

7. L'ensemble des suites à valeurs complexes vérifiant la relation de récurrence $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ admet pour base $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

8. Si les colonnes d'une matrice forment une famille liée, alors le rang de la matrice est nul.

9. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $(20, 1/5)$.
Alors il y a moins de 16 chances sur 500 pour que X soit supérieur à 14.

10. Si E est de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.

Mini-exercice : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ et $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_1^n k\omega_n^k$. Déterminer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Exercice 1.

1. **Étude des intégrales de Wallis**. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\sin(t)\big)^n \mathrm{d}t$.

   a. Calculer W_0 et W_1 puis étudier les variations de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)\big(W_n - W_{n+2}\big)$.

   c. En déduire que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est constante (on précisera sa valeur).

   d. Montrer que $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} W_{n+1}$ puis en déduire que $W_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

   e. Montrer par récurrence la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

2. **Démonstration de la formule de Stirling**. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \dfrac{n!}{n^n}\dfrac{\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}}$.

   a. Montrer que $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

   b. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$.

   c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ strictement positif.

   d. À l'aide de la question 1, déterminer la valeur de ℓ et en déduire que : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

3. **Application.** Déterminer la nature des séries

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{\binom{2k}{k}}, \qquad \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k} \quad \text{et} \quad \sum_{k \geqslant 1} \frac{\cos(k)}{k4^k}\binom{2k}{k}.$$

Exercice 2 (Temps de vidage d'une urne)**.** On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n, où n désigne un entier naturel non nul.

On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
- On répète ces tirages selon le même protocole jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule n°1.

On note dans la suite I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. Quelle est la loi de I_n ? Préciser la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$.
2. Quelle est la loi de X_1 ? De X_2 ?
3. Donner les valeurs des probabilités : $\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid I_3 = 1), \mathbb{P}(X_3 = 2 \mid I_3 = 2)$ et $\mathbb{P}(X_3 = 2 \mid I_3 = 3)$.
   En déduire la loi de X_3.
4. Préciser (sans justification) les valeurs prises par X_n, puis déterminer $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = n)$.
5. On suppose $n \geqslant 2$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Préciser un entier ℓ dépendant de j tel que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$:
$$\mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k) = \mathbb{P}(X_{k-1} = \ell).$$
6. En déduire que, pour tous entiers $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$:
$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j-1).$$
   Vérifier si cette relation est également vraie pour $n = 1$ (et $j \geqslant 2$).
7. Supposons $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$. Simplifier alors
$$n\mathbb{P}(X_n = j) - (n-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j).$$
8. En déduire, pour tous $n \geqslant 2$ et $j \geqslant 2$, la relation
$$\mathbb{P}(X_n = j) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1).$$
   Vérifier si cette relation est également vraie pour $j = 1$.
9. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}.$$
10. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X_n)$ sous forme d'une somme, et en donner un équivalent quand $n \to \infty$.
11. Exprimer, pour $n \geqslant 2$, $\mathbb{E}\left({X_n}^2\right)$ en fonction de $\mathbb{E}\left(X_{n-1}^2\right), \mathbb{E}(X_{n-1})$ et n.
12. En déduire que
$$\mathbb{V}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 3 (Noyaux itérés)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit f un endomorphisme de E. On rappelle que l'on note $f^0 = \mathrm{id}_E$ l'endomorphisme identité de E et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$.

On étudie la question de savoir s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E, et s'il y a lieu, de déterminer le plus petit tel entier que l'on notera p_0.

1. Déterminer p_0 dans les cas suivants : si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, si $f = \mathrm{id}_E$, si f est bijectif, si f est un projecteur, si f est une symétrie.

2. On étudie un cas particulier où E est de dimension 4, muni d'une base $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.
   Soit f l'endomorphisme de E défini par :
   $$f(e_1) = e_3, \quad f(e_2) = -e_1 + e_4, \quad f(e_3) = 0_E, \quad f(e_4) = -e_3.$$
   a. Sans les calculer, montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe.

   b. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{E}$, ainsi que la matrice de f^2 et f^3 dans cette même base.

   c. Déterminer une base de chacun des espaces suivants : $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f^2)$. En déduire p_0.

3. Retour au cas général : soit $f \in \mathcal{L}(E)\backslash\{0_{\mathcal{L}(E)}\}$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$.

   a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

   b. En raisonnant sur les dimensions, montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$.
   Soit m_0 le plus petit tel entier.

   c. Démontrer que pour tout $k \geqslant m_0$, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

   d. Montrer que $\mathrm{Im}(f^{m_0})$ et $\mathrm{Ker}(f^{m_0})$ sont en somme directe, et en déduire que $\mathrm{Im}(f^{m_0})$ et $\mathrm{Ker}(f^{m_0})$ sont supplémentaires dans E.

   e. Montrer que m_0 est le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Im}(f^p)$ et $\mathrm{Ker}(f^p)$ sont supplémentaires dans E c'est-à-dire que $p_0 = m_0$.

Exercice 4 (Étude d'une forme linéaire sur les polynômes)**.**
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Soit g l'application définie de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ par
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ \ g(P) = \int_{-1}^{1} P(t)dt.$$

1. a. Montrer que g est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   b. Déterminer la représentation matricielle de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}$.

   c. Déterminer la dimension puis une base du noyau de g.
   Conseil pour la base : chercher une famille échelonnée en degré.

   d. Déterminer un supplémentaire de $\ker g$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note ν_α la fonction *valeur en* α définie par $\nu_\alpha\ : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(\alpha). \end{cases}$
   On fixe également $n+1$ réels $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$.

   a. Justifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\nu_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

   b. Montrer que $(\nu_{a_0}, \nu_{a_1} \ldots, \nu_{a_n})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

   c. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$?

   d. En déduire qu'il existe une unique famille de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telle que
   $$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ ,\ \ \int_{-1}^{1} P(t)dt = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(a_i).$$