DS n°9 - Corrigé

Vrai/Faux. 1. *La série de terme général* $u_n = \dfrac{\cos(n^2)}{n^2}$ *est convergente.*

Vrai : cette série est convergente car absolument convergente, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ on a l'encadrement

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(n^2)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2},$$

qui est le terme d'une série convergente à termes positifs (série de Riemann avec $\alpha = 2$).

2. *Soient* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *des suites à valeurs réelles.*
La série de terme général u_n *converge si et seulement si les séries de terme général* $u_n + v_n$ *et de terme général* v_n *convergent toutes deux.*
Faux : le sens réciproque est vrai mais le sens direct évidemment faux : par exemple si u est la suite nulle et $v_n = \frac{1}{n}$, on obtient un contre-exemple.

3. *Si* E *est un espace vectoriel et* $f : E \to E$ *est un endomorphisme injectif, alors il est bijectif.*
Faux : On peut penser à $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = XP$ pour tout polynôme P. Cette fonction est injective mais pas bijective (les polynômes de degré 0 n'ont pas d'antécédents par f). Il faut nécessairement un contre-exemple en dimension infinie puisque l'assertion est vraie en dimension finie.

4. *Soit* $f : E \to F$ *une application linéaire avec* E *et* F *des espaces vectoriels de même dimension finie.*
Alors f *est surjective si et seulement si* $\ker f = \{0_E\}$.
Vrai : si E et F ont même dimension, f est surjective si et seulement si elle est injective, ce qui est équivalent à $\ker f = \{0_E\}$ par linéarité.

5. *Soient* X *et* Y *deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre.*
Alors leur somme suit une loi de Bernoulli avec ce paramètre.
Faux : si A est une partie de l'univers de proba $1/2$, $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_{barA}$ sont des variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\bar{A}) = 1/2$. Mais leur somme est la variable aléatoire certaine de valeur 1, qui n'est pas une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

6. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs réelles sur un même univers fini.
Alors X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
Faux : le sens direct est vrai mais la réciproque est fausse : par exemple si X suit une loi de Bernoulli de paramètre quelconque et $Y = X - 1$, X et Y ne sont pas indépendantes, et par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = 0.$$

7. *L'ensemble des suites à valeurs complexes vérifiant la relation de récurrence* $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *admet pour base* $((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n2^n)_{n\in\mathbb{N}})$.
Vrai : On note $\mathcal{E}$ cet ensemble, et on vérifie que les deux suites sont bien dans $\mathcal{E}$.
Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes : si λ_1 et λ_2 sont des complexes tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n = 0$, alors en particulier pour $n = 0$ on a $\lambda_1 = 0$, et par suite $\lambda_2 = 0$. Ces deux suites forment donc une famille libre de $\mathcal{E}$.
Ensuite, l'application linéaire $\Phi : \mathcal{E} \to \mathbb{C}^2$ qui a une suite u de $\mathcal{E}$ associe ses deux premières valeurs (u_0, u_1) est un isomorphisme (linéaire + bijectif). Donc $\mathcal{E}$ est de dimension 2 et la famille libre exhibée est donc une base de E.
Alternative acceptée pour éviter cet argument de dimension : le couple de suites est une famille génératrice de $\mathcal{E}$ d'après le cours du début de l'année.

8. *Si les colonnes d'une matrice forment une famille liée, alors le rang de la matrice est nul.*
Faux : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 : son image est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
⚠ Ne pas confondre avec le déterminant !

9. *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres* $(20, 1/5)$.
Alors il y a moins de 16 *chances sur* 500 *pour que* X *soit supérieur à* 14.

Vrai : La variable aléatoire X a pour espérance $\mathbb{E}(X) = np = 4$ et pour variance $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \frac{16}{5}$. On applique le théorème de Bienaymé-Tchebychev à X, avec la constante $a = 10$:

$$\mathbb{P}\big(|X-4| \geqslant 10\big) = \mathbb{P}\big(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\big) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2} = \frac{16}{500}.$$

Puis, l'inclusion $\{X \geqslant 14\} \subset \{|X-4| \geqslant 10\}$ a pour conséquence que

$$\mathbb{P}\left(X \geqslant 14\right) \leqslant \mathbb{P}\big(|X-4| \geqslant 10\big)\frac{16}{500},$$

ce qui était demandé.

10. *Si E est de dimension finie et $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, il existe une base de E dans laquelle la matrice de p est diagonale.*
Vrai : si p est un projecteur, $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ sont supplémentaires dans E. Comme E est de dimension finie, il existe une base $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ de E adaptée à ces sous-espaces vectoriels, c'est-à-dire telle que $e_i \in \operatorname{Im} p$ si $i \in [\![1, r]\!]$, pour lesquels $p(e_i) = e_i$, et $e_i \in \ker p$ si $i \in [\![r+1, n]\!]$, pour lesquels $p(e_i) = 0$.

Mini-exercice : Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ et $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\omega_n^k$. Déterminer la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.

On fait apparaître une série de Riemann :

$$S_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\omega_n^k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\omega_1^{k/n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

avec $f(t) = t\mathrm{e}^{2i\pi t} = t\cos(2\pi t) + it\sin(2\pi t)$, dont les parties réelles et imaginaires dépendent <u>continûment</u> de $t \in [0,1]$. On sépare parties réelles et parties imaginaires pour utiliser le théorème de la convergence des sommes de Riemann à valeurs réelles :

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(2\pi\frac{k}{n}\right) + i\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(2\pi\frac{k}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 t\cos(2\pi t)dt + i\int_0^1 t\sin(2\pi t)dt.$$

On calcule ces deux quantités par intégration par parties, en dérivant t et en primitivant la fonction trigonométrique : cela donne d'une part

$$\int_0^1 t\cos(2\pi t)dt = \left[t\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 - \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 \sin(2\pi t)dt}_{=0} = 0$$

et d'autre part

$$\int_0^1 t\sin(2\pi t)dt = \left[-t\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos(2\pi t)dt}_{=0} = -\frac{1}{2\pi}.$$

On a donc montré que $\boxed{S_n \to -\dfrac{i}{2\pi} = \dfrac{1}{2i\pi}.}$

Exercice 1.

1. a. $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, $\qquad W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \big[-\cos(t)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n\big(\sin(t) - 1\big)\mathrm{d}t.$$

De plus, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t)^n \geqslant 0$ et $1 - \sin(t) \leqslant 0$, donc par croissance de l'intégrale $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.
Ainsi, $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto \sin(t)^{n+1}$. Les fonction u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par opération sur des fonctions usuelles $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = (n+1)\cos(t)\sin(t)^n$.
Par intégration par parties, on obtient donc

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin(t)}_{u'(t)} \underbrace{\sin(t)^{n+1}}_{v(t)} \mathrm{d}t = \left[(-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(t))(n+1)\cos(t)\sin(t)^n \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 \sin(t)^n \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin(t)^2\right)\sin(t)^n \mathrm{d}t \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^n \mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{n+2}\mathrm{d}t\right) = \boxed{(n+1)\left(W_n - W_{n+2}\right)} \end{aligned}$$

c. Tout d'abord, on remarque que le résultat précédent se simplifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ $(\star)$.
Notons $v_n = (n+1)W_{n+1}W_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$ par stricte positivité de l'intégrale, puisque la fonction $t \mapsto \sin(t)^n$ est positive, continue $[0, \frac{\pi}{2}]$ et non identiquement nulle. On peut donc évaluer le ratio d'accroissement de la suite v_n, qui ne s'annule pas non plus : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{W_{n+2}W_{n+1}}{W_{n+1}W_n} = 1 \text{ d'après } (\star),$$

donc la suite (v_n) est constante, de valeur $v_0 = W_0 W_1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$

d. En utilisant le résultat $(\star)$, on a $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc comme $\frac{n+1}{n+2}$ tend vers 1, W_n et W_{n+2} sont équivalents.
Puis, la suite étant décroissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$, ce qui est un encadrement de W_{n+1} par deux quantités équivalents à W_n. On en conclut par encadrement que $W_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} W_n$.
On a donc $W_{n+1}W_n \sim W_n^2$ et $W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2(n+1)} \sim \dfrac{\pi}{2n}$ puis en appliquant la racine carrée, on obtient donc

$$W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

e. On note $\mathcal{P}(n) : W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$.

— Pour $n = 0$, on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(0)!}{2^0(0!)^2} = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

— Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation $(\star)$ au rang $2n$, puis l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} W_{2(n+1)} = W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2^2(n+1)^2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{W_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.}$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!\mathrm{e}^n} = \dfrac{(n+1)\,\mathrm{e}^1 n^n n^{\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1}(n+1)^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{e} \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$

Ainsi, $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(\mathrm{e}) + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \boxed{1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$ car $\ln(\frac{a}{b}) = -\ln(\frac{b}{a})$. On rappelle le développement limité de ln au voisinage de 1 : $\boxed{\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)}$ quand $u \to 0$. En appliquant ce développement avec $u = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, on obtient

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \boxed{-\frac{1}{12n^2}}.$$

b. D'après la question précédente, $|\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)| = |\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n})| \sim \frac{1}{12n^2} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{12n^2}$ est une série convergente (proportionnelle à une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$).
Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\big(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)\big)$ est absolument convergente, donc convergente.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, on peut calculer la somme partielle de rang n de $\sum\limits_{k\geqslant 1}(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k))$ par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n}\big(\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)\big) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1) = \ln(u_{n+1})$$

et cette somme partielle converge quand $n \to \infty$ (vers S la somme de la série). On en déduit donc, par continuité de l'exponentielle : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(S) = \ell,}$ qui est un réel strictement positif puisque l'exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$.

d. On a d'après la question précédente, $n! = u_n\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n \underset{n\to\infty}{\sim} \ell\sqrt{n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$.
En utilisant cela dans le résultat de la question 1.(g), on obtient

$$\sqrt{4n}W_{2n} \sim 2\sqrt{n}\frac{\pi}{2}\frac{\ell\sqrt{2n}(\frac{2n}{\mathrm{e}})^{2n}}{2^{2n}\ell^2 n(\frac{n}{\mathrm{e}})^{2n}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\ell}$$

Or $\sqrt{4n}W_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\pi}$ d'après 1.(g), donc par unicité de la limite, on en déduit que $\boxed{\ell = \sqrt{2\pi}}$.
On peut donc préciser l'équivalent de la factorielle : $n! \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n$.

3. Pour les trois séries, on va avoir besoin de déterminer un équivalent de $\binom{2n}{n}$, qu'on calcule grâce à la formule de Stirling : si $n \in \mathbb{N}$, on obtient en simplifiant :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

- Pour la première série, on obtient par croissance comparée

$$\frac{k^2}{\binom{2k}{k}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}k^{5/2}}{4^k} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

donc $\dfrac{1}{\binom{2k}{k}} = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{\binom{2k}{k}}$ est donc convergente.

- Pour la 2e série, $\dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}$ qui est le terme général d'une série divergente (série de Riemann avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)), donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$ diverge.

- Pour la troisième série, on va montrer qu'elle converge absolument : si $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(k)}{k4^k}\binom{2k}{k}\right| \leqslant \frac{1}{k4^k}\binom{2k}{k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{k^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$). Donc par comparaison entre série à termes positifs, la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos(k)}{k4^k}\binom{2k}{k}$ est absolument convergente, donc convergente.

Exercice 2 (Temps de vidage d'une urne). 1. On a $I_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Chaque numéro ayant autant de chances que les autres d'être tiré, on en déduit que $\boxed{I_n \sim \mathcal{U}\left([\![1,n]\!]\right)}$.

L'événement $[I_n = 1]$ signifie que la première boule tirée porte le numéro 1. On arrête alors les tirages dès le premier tirage, donc $\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1 | I_n = 1) = 1}$: la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$ est une loi certaine de valeur 1.

2. Étant donné que X_1 donne le nombre de tirages nécessaires pour obtenir le numéro 1 dans une urne ne contenant que ce numéro, à nouveau X_1 suit une loi certaine de valeur 1, donc on a $\boxed{X_1(\Omega) = \{1\}}$, et $\boxed{\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1}$.

On a $X_2(\Omega) = [\![1,2]\!]$, et

$$\mathbb{P}\left(X_2 = 1\right) = \mathbb{P}(I_2 = 1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}\left(X_2 = 2\right) = \mathbb{P}(I_2 = 2) = \frac{1}{2}$$

donc X_2 suit la loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

3.
   - L'événement $[I_3 = 1]$ signifie que le numéro 1 a été obtenu au premier tirage. On en déduit

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_3 = 2 \mid I_3 = 1\right) = 0}$$

   - L'événement $[I_3 = 2]$ signifie qu'au premier tirage, on a obtenu le numéro 2. Suite à ce tirage, on enlève les boules 2 et 3 ; ne reste alors dans l'urne que le numéro 1. On en déduit

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X_3 = 2 \mid I_3 = 2\right) = 1}$$

   - On remarque que si $[I_3 = 3]$, on peut se ramener à l'étude de X_2 :

$$\mathbb{P}\left(X_3 = 2 \mid I_3 = 3\right) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Déterminons maintenant la loi de X_3. On a $X_3(\Omega) = [\![1,3]\!]$.

   - Tout d'abord, l'événement $[X_3 = 1]$ signifie que l'on tire la boule 1 au premier tirage ; chaque boule ayant la même chance que les autres d'être tirée, on en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X_3 = 1\right) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

   - Ensuite, toujours par équiprobabilité au premier tirage, pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, on a $\mathbb{P}(I_3 = k) = \frac{1}{3}$. Comme $(I_3 = k)_{1 \leqslant k \leqslant 3}$ est un SCE, en utilisant la question 3., on en déduit par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}\left(X_3 = 2\right) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}\left(X_3 = 2 \mid I_3 = k\right) \mathbb{P}\left(I_3 = k\right) = \frac{1}{3}\left(0 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

   - On obtient enfin

$$\mathbb{P}\left(X_3 = 3\right) = 1 - \mathbb{P}(X_3 = 1) - \mathbb{P}(X_3 = 2) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

4. On a $\boxed{X_n(\Omega) = [\![1,n]\!]}$.
   - L'événement $[X_n = 1]$ signifie tirer la boule 1 au premier tirage ; étant en situation d'équiprobabilité, on en déduit

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}}$$

- L'événement $[X_n = n]$ signifie obtenir la boule 1 au n-ième tirage. Pour ce faire, sachant qu'à chaque tirage, on retire les boules de numéro supérieur ou égal à celui tiré, il faut tirer dans l'ordre les numéros n, $n-1$, $\cdots$, jusqu'au numéro 1.
  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, notons $Y_{k,n}$ la variable aléatoire donnant le numéro tiré au k-ième tirage dans l'urne contenant n boules.
  Par la formule des probabilités composées, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}\big([Y_{1,n} = n] \cap [Y_{2,n} = n-1] \cap \ldots \cap [Y_{n-1,n} = 2] \cap [Y_{n,n} = 1]\big) \\
&= \mathbb{P}(Y_{1,n} = n) \times \mathbb{P}(Y_{2,n} = n-1 \mid Y_{1,n} = n) \\
&\qquad \times \cdots \times \mathbb{P}([Y_{n,n} = 1] \mid [Y_{1,n} = n] \cap \ldots \cap [Y_{n-1,n} = 2]) \\
&= \mathbb{P}(I_n = n) \times \mathbb{P}(I_{n-1} = n-1) \times \cdots \times \mathbb{P}(I_1 = 1) \\
&= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 = \boxed{\frac{1}{n!}}
\end{aligned}$$

5. Soit $k \in [\![2, n]\!]$.
   Supposons que l'événement $[I_n = k]$ s'est réalisé ; on a donc tiré la boule portant le numéro k. Il reste alors les numéros 1 à $k-1$ dans l'urne. L'événement $[X_n = j]$ signifie que, avant de tirer le numéro 1, il y a j tirages à effectuer, dans une urne à n boules. Sachant qu'un tirage a déjà été effectué, cela signifie qu'il reste à présent à effectuer exactement $j-1$ tirages pour obtenir 1, et ce dans une urne contenant $k-1$ boules. On en déduit que
$$\mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k) = \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1)$$
   L'entier ℓ recherché est donc $\boxed{\ell := j-1}$.

6. Soit $n \geqslant 2$, et soit $j \geqslant 2$. Comme $(I_n = k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est un SCE (événements équiprobables, tous de probabilité $\frac{1}{n}$), on a par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(I_n = k)\,\mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k)$$
   Or, par la question 5., pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $\mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k) = \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1)$. En isolant le terme en $k = 1$ de la somme (qui est nul, puisque $j \geqslant 2$), on en déduit :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = j) &= \frac{1}{n}\mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = 1) + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_n = j \mid I_n = k) \\
&= 0 + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) \\
&= \boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j-1)} \qquad \text{(décalage d'indice de 1)}
\end{aligned}$$
   Dans le cas où $n = 1$, cette égalité est également vraie car elle signifie $0 = 0$. En effet, d'une part, si $j \geqslant 2$, il est impossible que X_1 vaille j. D'autre part, une somme vide vaut 0.

7. Soit $n \geqslant 2$, et soit $j \geqslant 2$. En utilisant la question 6. précédente, on calcule :
$$\begin{aligned}
&n\mathbb{P}(X_n = j) - (n-1)\mathbb{P}(X_{n-1} = j) \\
&\quad = n \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j-1) - (n-1) \times \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(X_k = j-1) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_k = j-1) - \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(X_k = j-1) \\
&\quad = \boxed{\mathbb{P}(X_{n-1} = j-1)}
\end{aligned}$$

8. Soit $n \geqslant 2$.

- On isole $\mathbb{P}(X_n = j)$ dans la relation précédente, et l'on obtient

$$n\mathbb{P}\left(X_n = j\right) = (n-1)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j\right) + \mathbb{P}\left(X_{n-1} = j-1\right)$$

Donc : $$\boxed{\mathbb{P}\left(X_n = j\right) = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j-1\right)}$$

- De plus, pour $j = 1$, on a

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(I_n = 1) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_{n-1} = 1) = \mathbb{P}(I_{n-1} = 1) = \frac{1}{n-1}$$

ainsi que $\mathbb{P}\left(X_{n-1} = 0\right) = 0$. On en déduit :

$$\frac{1}{n} = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{n}\mathbb{P}(X_{n-1} = 1)$$

La formule précédente reste donc vraie pour $j = 1$.

9. Soit $n \geqslant 2$. De la question 8., on déduit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n\right) &= \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}\left(X_n = j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j\left(\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j-1\right)\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j-1\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) \qquad \leftarrow \text{chgt d'indice : } k = j-1 \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right) + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = k\right)}_{=1} \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(X_{n-1}\right) + \frac{1}{n} \\
&= \boxed{\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

10. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X_{k-1}) + \frac{1}{k}\,, \text{donc} \quad \frac{1}{k} = \mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})$$

On en déduit un télescopage : en sommant les égalités précédentes pour k allant de 2 à n, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{n} \left(\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})\right) = \mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1)$$

Comme $X_1 = 1$ (cf. question 2.), on a $\mathbb{E}(X_1) = 1$, et l'on en déduit :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + 1 = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

11. Soit $n \geqslant 2$. On a, en réutilisant la question 8. (on y a notamment montré que la formule était valable pour $j = 1$),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X_n^2\right) &= \sum_{j=1}^{n} j^2 \mathbb{P}\left(X_n = j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 \left(\frac{n-1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j\right) + \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(X_{n-1} = j-1\right)\right) \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} j^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} j^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = j-1) \\
&= \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} j^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (m+1)^2 \mathbb{P}(X_{n-1} = m) \qquad \leftarrow \text{chgt d'indice } m = k-1 \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (k^2 + 2k + 1)\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\
&= \frac{n-1}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n}\left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + 2\mathbb{E}(X_{n-1}) + 1\right) \qquad \leftarrow \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) = 1 \\
&= \boxed{\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

12. Si $n \geqslant 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n}\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) - \mathbb{E}(X_{n-1})^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \\
&= \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1}) = \mathbb{V}(X_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}$. Comme X_1 suit une loi certaine, sa variance est nulle, et on peut ajouter les termes en $k = 1$ dans les sommes, qui se compensent :

$$\boxed{\mathbb{V}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.}$$

Exercice 3 (Noyaux itérés). 1. ▸ Si $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\mathrm{Ker}(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ et $\mathrm{Im}(0_{\mathcal{L}(E)}) = \{0_E\}$ sont supplémentaires dans E. Cela permet de conclure que $p_0 = 1$.

- Pour tout $x \in E$, $\mathrm{id}_E(x) = x$ donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E) = E$.
  On peut conclure que pour $f = \mathrm{id}_E$, $p_0 = 1$.

- Par hypothèse, l'endomorphisme f est bijectif. Par conséquent, il est injectif donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et il est surjectif donc $\mathrm{Im}(f) = E$.
  On peut conclure que pour f un automorphisme de E, $p_0 = 1$.

- L'endomorphisme f étant un projecteur, d'après le cours sur les projecteurs, les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E.
  On peut conclure que pour f un projecteur de E, $p_0 = 1$.

- Par hypothèse, f est une symétrie donc $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Par conséquent, f est un automorphisme (d'automorphisme réciproque f) et donc $p_0 = 1$.

2. a. On remarque que $e_3 = f(e_1)$ donc $e_3 \in \mathrm{Im}(f)$ et $f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$ donc $e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$. Par conséquent, $e_3 \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$. Or $e_3 \neq 0_E$ (puisque c'est un élément d'une base) donc $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Cela démontre que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ ne sont pas en somme directe.

   b. Notons A la matrice de f dans $\mathcal{E}$. Avec les valeurs des $f(e_i)$, on peut écrire $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   D'après la formule de la matrice d'une composition d'endomorphismes, f^2 et f^3 sont représentées respectivement par A^2 et A^3 dans $\mathcal{E}$. Donc

$$Mat_{\mathcal{E}} f^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{\mathcal{E}} f^3 = A^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}.$$

   c. Comme (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \mathrm{Vect}(e_3, -e_1+e_4, 0_E, -e_3) = \mathrm{Vect}(e_3, -e_1 + e_4)$. Comme e_3 et $-e_1 + e_4$ sont linéairement indépendants (puisque leurs représentations matricielles dans $\mathcal{E}$ sont échelonnées : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$), on a exhibé une base de $\mathrm{Im}\, f$, qui est donc de dimension 2. D'après la formule du rang, $\ker f$ doit être de dimension 2 également, et contient e_3 et $e_1 + e_4$ qui sont linéairement indépendants pour la même raison. Donc par dimension, $(e_3, e_1 + e_4)$ est une base de $\ker f$.
   En utilisant l'écriture matricielle de A^2 dans la base $\mathcal{E}$, on lit que $f^2(e_1) = f^2(e_3) = f^2(e_4) = 0_E$, et que $f^2(e_2) = -2e_3$. On en déduit que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Vect}(f^2(e_1), f^2(e_2), f^2(e_3), f^2(e_4)) = \mathrm{Vect}(-2e_3) = \mathrm{Vect}(e_3)$ donc (e_3) est une base de $\mathrm{Im}\, f^2$, qui est de dimension 1.
   À nouveau la formule du rang nous donne la dimension du noyau : $\dim \ker f^2 = 3$, et comme (e_1, e_3, e_4) est une famille libre de trois éléments dans ce noyau, c'est aussi une base du noyau.
   Comme f^3 est l'endomorphisme nul (puisque sa matrice dans $\mathcal{E}$ est nulle), on a $\mathrm{Im}\, f^3 + \ker f^3 = E$. Or on a montré dans la question 2a que $\mathrm{Im}\, f$ et $\ker f$ ne sont pas supplémentaires, et ce qui précède montre que $\mathrm{Im}\, f^2$ et $\ker f^2$ ne sont pas non plus supplémentaires, puisqu'ils contiennent tout deux e_3. On a donc montré que $p_0 = 3$.

3. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$. Alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$ par linéarité de f. Cela démontre l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

   b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\mathrm{Ker}(f^k)$ est de dimension finie et $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \leqslant n$. Et d'après la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))$.
   On va démontrer par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$.

Pour cela, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k) \neq \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Comme par ailleurs $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f^k)) < \dim(\mathrm{Ker}(f^{k+1}))$, autrement dit la suite d'entiers $(\dim(\mathrm{Ker}(f^k)))_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est strictement croissante ; or elle est majorée par n, ce qui est impossible.
On a obtenu par l'absurde qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1})$. Suivant l'énoncé, on note m_0 le plus petit tel entier.

c. Soit $k \geqslant m_0$. D'après la question 3.(a), on a déjà l'inclusion $\mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.
Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Par définition $f^{k+1}(x) = 0_E$. On sait que $m_0 \leqslant k$ donc $0_E = f^{k+1}(x) = f^{m_0+1}(f^{k-m_0}(x))$ donc $f^{k-m_0}(x) \in \mathrm{Ker}(f^{m_0+1})$. Or, par définition de m_0, $\mathrm{Ker}(f^{m_0+1}) = \mathrm{Ker}(f^{m_0})$. Donc $f^{k-m_0}(x) \in \mathrm{Ker}(f^{m_0})$ c'est-à-dire $f^{m_0}(f^{k-m_0}(x)) = 0_E$. Cela se réécrit $f^k(x) = 0_E$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(f^k)$. Cela démontre l'inclusion réciproque $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Ker}(f^k)$.
On vient de démontrer que pour tout $k \geqslant m_0$, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$.

d. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^{m_0}) \cap \mathrm{Ker}(f^{m_0})$. On a $x \in \mathrm{Im}(f^{m_0})$ donc il existe $z \in E$ tel que $x = f^{m_0}(z)$. Puis $x = f^{m_0}(z) \in \mathrm{Ker}(f^{m_0})$ donc $f^{m_0}(f^{m_0}(z)) = 0_E$. Par conséquent, $z \in \mathrm{Ker}(f^{m_0+m_0})$.
Or comme $\ker f^k = \ker f^{k+1}$ pour tout $k \geqslant m_0$, on a par récurrence immédiate $\ker f^k = \ker f^{m_0}$ pour tout $k \geqslant m_0$, donc comme $2m_0 \geqslant m_0$, $\mathrm{Ker}(f^{m_0+m_0}) = \mathrm{Ker}(f^{m_0})$. On en déduit que $z \in \mathrm{Ker}(f^{m_0})$ puis que $x = f^{m_0}(z) = 0_E$. Cela démontre l'inclusion $\mathrm{Im}(f^{m_0}) \cap \mathrm{Ker}(f^{m_0}) \subset \{0_E\}$, l'autre inclusion découlant automatiquement du fait que $\mathrm{Im}\, f^{m_0}$ et $\ker f^{m_0}$ sont des sous-espaces vectoriels et contiennent donc 0_E.
On a démontré que $\mathrm{Im}(f^{m_0}) \cap \mathrm{Ker}(f^{m_0}) = \{0_E\}$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(f^{m_0})$ et $\mathrm{Ker}(f^{m_0})$ sont en somme directe.
D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f^{m_0} de E, on a $\dim(\mathrm{Im}(f^{m_0})) + \dim(\mathrm{Im}(f^{m_0})) = \dim(E)$. Par conséquent, comme les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(f^{m_0})$ et $\mathrm{Ker}(f^{m_0})$ sont aussi en somme directe, ils sont supplémentaires dans E.

e. La question 3d montre que $m_0 \geqslant p_0$ (p_0 est le plus petit entier pour lequel la propriété de supplémentarité est vérifiée).
Il suffit donc de montrer l'inégalité contraire, en justifiant que $\ker f^{p_0} = \ker f^{p_0+1}$ (m_0 est le plus petit entier vérifiant cette égalité).
On a déjà l'inclusion $\ker f^{p_0} \subset \ker f^{p_0+1}$ d'après la question 3a.
Soit $x \in \ker f^{p_0+1}$. Alors par linéarité de f on a aussi $f^{2p_0}(x) = 0_E$, donc $f^{p_0}(x)$ est à la fois dans $\mathrm{Im}\, f^{p_0}$ et dans $\ker f^{p_0}$. Mais par définition de p_0, ces ensembles sont en somme directe, donc $f^{p_0}(x) = 0_E$ et on a montré l'inclusion réciproque $\ker f^{p_0+1} \subset \ker f^{p_0}$, donc par double inclusion $\ker f^{p_0+1} = \ker f^{p_0}$ et par conséquent $p_0 \geqslant m_0$.
On en conclut par double inégalité que $p_0 = m_0$.

Exercice 4 (Étude d'une forme linéaire sur les polynômes)**.** 1. a. g est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$, donc il ne reste qu'à montrer qu'elle est linéaire. Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= \int_{-1}^{1} (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(t)dt \\ &= \lambda_1 \int_{-1}^{1} P_1(t)dt + \lambda_2 \int_{-1}^{1} P_2(t) \ = \ \lambda_1 g(P_1) + \lambda_2 g(P_2). \end{aligned}$$

b. Fixons $k \in [\![0, n]\!]$ et calculons $g(X^k)$.

- si k est impair, $g(X^k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^k dx = 0$;
- si k est pair, $g(X^k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^k dx = \frac{2}{k+1}$.

Donc la matrice de g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et de $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$Mat_{1,(1,X,\ldots,X^n)} g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & \ldots & \frac{(-1)^n+1}{2}\frac{2}{n+1} \end{pmatrix}.$$

c. $\text{Im}(g)$ est un sev de $\mathbb{R}$, donc sa dimension est 0 ou 1.
Or, $\dim(\text{Im}(g)) = 0$ signifie que $\text{Im}(g) = \{0\}$, c'est-à-dire que g est l'application nulle, ce qui est faux.
Donc $\dim(\text{Im}(g)) = 1$, et par théorème du rang, $\boxed{\dim(\ker g) = (n+1) - 1 = n}$.

Déterminons une base du noyau. On pose les polynômes $(Q_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= X & Q_2 &= X^2 - \frac{1}{3} \\ Q_3 &= X^3 & Q_4 &= X^4 - \frac{1}{5} \\ Q_5 &= X^5 & Q_6 &= X^6 - \frac{1}{7} \end{aligned}$$

etc...

Autrement dit :

- si k est impair, $Q_k = X^k$, ce qui implique que $g(X^k) = 0$, c'est-à-dire $Q_k \in \ker(g)$;
- si k est pair, $Q_k = X^k - \frac{1}{k+1}$, de sorte que

$$g(Q_k) = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k+1} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad Q_k \in \ker(g).$$

La famille $(Q_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est donc une famille de $\ker(g)$:

- libre, car de degrés échelonnés ;
- de cardinal $n = \dim(\ker g)$.

C'est donc une base de $\ker(g)$.

d. Un supplémentaire de $\ker g$ est forcément de dimension 1, donc il suffit de trouver un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ qui n'est pas dans $\ker g$, par exemple $P = 1$ (mais on peut aussi prendre $P = X^{2k}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$). Alors la famille $(Q_1, \ldots, Q_n, P)$ est libre et la droite vectorielle engendrée par P et $\ker g$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Il suffit de montrer que ν_α est linéaire.
Soit $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(\alpha) \\ &= \lambda_1 P_1(\alpha) + \lambda_2 P_2(\alpha) \\ &= \lambda_1 \nu_\alpha(P_1) + \lambda_2 \nu_\alpha(P_2) \end{aligned}$$

b. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nu_{a_k} \;=\; 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})}$.

On a donc, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nu_{a_k}(P) \;=\; 0 \qquad (E)$$

Fixons $i \in [\![0, n]\!]$ et posons $P_i \;=\; \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (X - a_k)$. On a :

- P_i est de degré n, donc $P_i \in \mathbb{R}_n[X]$;
- pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $k \neq i$, $P_i(a_k) = 0$, c'est-à-dire $\nu_{a_k}(P_i) = 0$;
- $P_i(a_i) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} (a_i - a_k) \neq 0$, donc $\nu_{a_i}(P_i) \neq 0$.

On applique l'égalité (E) à $P = P_i$ pour obtenir

$$0 \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nu_{a_k}(P_i) \;=\; \lambda_i \nu_{a_i}(P_i)$$

ce qui implique $\lambda_i = 0$.
Ce raisonnement étant valable pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, tous les λ_i sont nuls.

c. Par théorème :

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})) \;=\; \dim(\mathbb{R}_n[X]) \times \dim(\mathbb{R}) \;=\; (n+1) \times 1 \;=\; n+1$$

d. $(\nu_{a_0}, \dots, \nu_{a_n})$ est une famille libre et de cardinal $(n+1)$ dans l'ev $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ qui est de dimension $(n+1)$.
C'est donc une base de cet ev.
Donc g, comme tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$, s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire des ν_{a_k} : il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$g \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nu_{a_k},$$

où les λ_i sont les coordonnées de g dans la base $(\nu_{a_0}, \dots, \nu_{a_n})$. Autrement dit, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$g(P) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \nu_{a_k}(P) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \int_{-1}^{1} P(t)dt \;=\; \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k).$$