Fonctions exponentielle, logarithme, puissance

Définition 1 (*Exponentielle et logarithme*)

- La *fonction exponentielle*, notée exp, est l'unique fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$. On note $\mathrm{e} = \exp(1)$.
- On appelle *logarithme népérien*, et on note ln, la bijection réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0;+\infty[$.

Propriété 2 (*Exponentielle*)

- Pour tout x et $y \in \mathbb{R}$,
$$\exp(x) > 0, \qquad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{et} \quad \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)\,.$$
- Limites aux bords : $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty\,.$
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Propriété 3 (*Logarithme*)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\big(\exp(x)\big) = x$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\exp\big(\ln(y)\big) = y$.
- Pour tout a et $b \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ et $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Limites aux bords : $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Définition 4 (*Notation puissance*)

Pour $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b = \exp\big(b\ln(a)\big)$.

- pour $a = \mathrm{e} = \exp(1)$, cela donne $\mathrm{e}^x = \exp(x)$,
- pour $b = n \in \mathbb{N}$, on retrouve $a^n = a \times \cdots \times a$, pour $b = \frac{1}{2}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, et pour $b = \frac{1}{n}$, la racine n-ième $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Propriété 5 (*Calcul avec les puissances*)

Pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, on a
$$\ln\big(x^a\big) = a\ln(x), \quad (xy)^a = x^a y^a, \quad x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = x^{ab} \text{ et } \frac{1}{x^a} = x^{-a}.$$

Propriété 6 (*Fonction puissance avec exposant constant*)

Pour $a \in \mathbb{R}$ fixé :

- la fonction $x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et sa dérivée est $x \mapsto ax^{a-1}$.
- elle est croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$ si $a \geq 0$, décroissante si $a \leq 0$.
- $$\lim_{x\to0^+} x^a = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases}.$$

Propriété 7 (*Croissances comparées*)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x\ln(x) = 0^-$$

Généralisation : pour $a > 0$ et $b > 0$,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(bx)}{x^a} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\big(\ln(x)\big)^b}{x^a} = 0$$

Propriété 8 (*Limites de taux d'accroissements pour* exp *et* ln)

$$\lim_{x\to0} \frac{\exp(x)-1}{x} = \exp'(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \ln'(1) = 1.$$

Propriété 9 (*Inégalités de convexité*)

exp est convexe sur $\mathbb{R}$ et ln est concave sur $\mathbb{R}_+^\star$. Par conséquent :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geq 1 + x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \ln(x) \leq x - 1.$$

Définition 10 (*Logarithme décimal, logarithme en base 2*)

- Le *logarithme décimal*, noté $\ln_{10}$, est la fonction continue qui transforme les produits en somme et vaut 1 en 10.
- Le *logarithme en base* 2, noté $\ln_2$, est la fonction continue qui transforme les produits en somme et vaut 1 en 2.

Propriété 11

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ et $\ln_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$,
- et $\lfloor \ln_{10}(x) \rfloor + 1$ est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de x et $\lfloor \ln_2(x) \rfloor + 1$ est le nombre de chiffres dans l'écriture binaire de x.

Fonctions discontinues / de dérivée discontinue

Définition 12 (*Signe*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\operatorname{sgn}(x)$ la fonction signe : $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Définition 13 (*Valeur absolue*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ la valeur absolue de x.

La valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$, de dérivée sgn.

Définition 14 (*Partie entière*)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égale à x.
On appelle *partie entière* la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ qui est définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle *partie fractionnaire* la fonction $x \mapsto \{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Remarque : la fonction partie entière n'est pas dérivable, ni continue, sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Elle est croissante, mais pas strictement croissante.

Propriété 15

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad$ et $\quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

De plus, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier qui vérifie chacune de ces inégalités.

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Définition 16 (*Cosinus, sinus et tangente*)

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\cos(x)$ l'abscisse, et $\sin(x)$ l'ordonnée, du point obtenu en parcourant une distance x sur le cercle de rayon 1 centré en l'origine (cercle trigonométrique) depuis le point $(1,0)$ dans le sens trigonométrique.
- La fonction *tangente*, notée tan, est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}$ par :
$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Propriété 17 (*Rappels sur le cosinus et sinus*)

- cos est paire, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$.
- sin est impaire, 2π-périodique, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\sin' = \cos$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.
- cos et sin sont majorées par 1 et minorées par -1.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b), \\ \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b). \end{cases}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

Propriété 18 (*Tangente*)

- La fonction tan est impaire et π-périodique.
- Elle est dérivable sur $\mathcal{D}$ et pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$.
- Elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et
$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty.$$
- La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vers $\mathbb{R}$.

▶ Les fonctions cos et sin sont la partie réelle et la partie imaginaire de la fonction *exponentielle complexe* : $x \mapsto \mathrm{e}^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.
▶ Les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique sont la partie paire et la partie impaire de l'exponentielle réelle.

Définition 19 (*Cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique*)

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on définit $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

Propriété 20 (*Cosinus et sinus hyperboliques*)

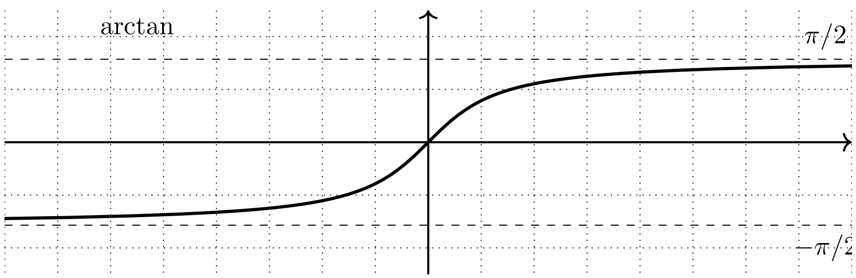
- ch est paire, vaut 1 en 0, et est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.
- sh est impaire, vaut 0 en 0, et est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = \exp(x)$ et $\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$.
- Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b), \\ \operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b). \end{cases}$
- $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 21 (*Fonction Arctangente*)

On appelle fonction *arctangente*, que l'on note arctan, la bijection réciproque de la fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Si $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$, son argument est donné par $\arg(z) \equiv \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re} z}\right)\ [\pi]$.



Propriété 22 (*Arctangente*)

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$$\tan(\arctan(x)) = x \quad \text{et} \quad \arctan(\tan(y)) = y.$$
- La fonction arctan est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
- Elle est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

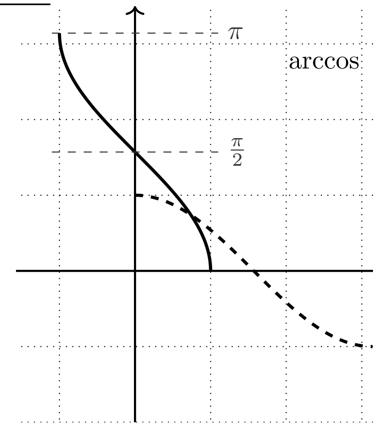
EXO : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\dfrac{\pi}{2}$.

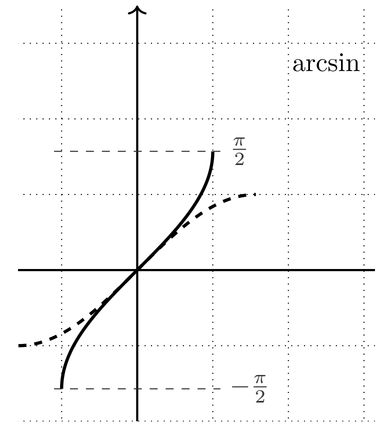
- la fonction cos restreinte à $[0, \pi]$ est strictement décroissante,
- la fonction sin restreinte à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est strictement croissante.

On obtient donc des bijections si l'on co-restreint l'espace d'arrivée à $[-1, 1]$.

Définition 23 (*Fonctions Arcsinus et Arccosinus*)

- La fonction *arc cosinus* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ est la réciproque de la bijection $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$;
- La fonction *arc sinus* $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est la réciproque de la bijection $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$.





Propriété 24 (*Arccosinus et arcsinus*)

- On a $\forall y \in [-1, 1], \cos(\arccos(y)) = y \quad \text{et} \quad \sin(\arcsin y) = y$.
- La fonction $\arccos \circ \cos$ est paire, 2π-périodique, et vérifie
$$\forall x \in [0, \pi], \arccos(\cos(x)) = x.$$
- La fonction $\arcsin \circ \sin$ est impaire, 2π-périodique, et vérifie
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x.$$
- Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin y) = \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$.
- Les fonctions arccos et arcsin sont dérivables sur l'intervalle ouvert $]-1, 1[$ mais sont non dérivables en -1 et en 1.
On a, pour tout $y \in]-1, 1[$,
$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \qquad \text{et} \qquad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

EXO : montrer que $\arccos + \arcsin$ est une fonction constante, qu'on déterminera.