

## Colle n°2

Semaine du 23/09/2024

### Ce que le programme contient :

#### APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES

- ★ Injectivité, surjectivité d'une application entre deux ensembles. Caractérisation à l'aide de quantificateurs.
- ★ Définition et caractérisation de l'application réciproque d'une application bijective.
- ★ Image directe, image réciproque d'un ensemble par une fonction.

#### SOMMES, PRODUITS, COEFFICIENTS BINOMIAUX

- ★ Notation  $\sum$  et propriétés : linéarité, relation de Chasles, changements d'indice (de type glissement ou retournement), somme télescopique, séparation des termes de rangs pairs et impairs.
- ★ Positivité de  $\sum$ . Inégalité triangulaire.
- ★ Sommes usuelles : pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- ★ Notation  $\prod$  et exemples d'utilisations, factorielle. Propriétés des produits finis vues par analogie de celles des sommes (produit télescopique, Chasles, factorisation...)
- ★ Expression, interprétations et propriétés diverses des coefficients binomiaux : expression en terme de factorielles, symétrie, triangle de Pascal.
- ★ Formule du binôme de Newton et exemples de calculs de somme. Technique de linéarisation en trigo.

### Ce que le programme ne contient pas :

- ★ des sommes doubles,
- ★ des exercices avancés sur les nombres complexes (les aspects géométriques seront bientôt approfondis)
- ★ du dénombrement.

### Questions de cours possibles.

- ★ Linéariser  $\sin^5(x)$  pour  $x$  réel.
- ★ Somme des  $n$  premiers entiers, démonstration par retournement.
- ★ Somme géométrique avec démonstration.
- ★ Factorisations de  $a^n - b^n$  et  $a^n + b^n$  (si possible...), avec démonstration.
- ★ Coefficients binomiaux : expression avec les factorielles et démonstration de la formule de Pascal.
- ★ Formule du binôme de Newton avec démonstration (récurrence).
- ★ Montrer que la composée de deux fonctions injectives est injective. Énoncer la réciproque partielle.
- ★ Montrer que la composée de deux fonctions surjectives est surjective. Énoncer la réciproque partielle.