Démontrer une proposition par l'absurde.

Stratégie : On suppose la proposition fausse, et on en déduit une contradiction.

Rédaction : Suppo P e
[Argument , on obtient une contradiction.
On a donc montré par l'ab P e

Démontrer ou utiliser des assertions quantifiées

Pour X un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable $x \in X$:

Démonstration de $\forall x \in X, P(x)$	**Démonstration de $\exists x \in X : P(x)$**
Montrons $\forall x \in X, P(x)$. Soit $x \in X$. Montrons $P(x)$. [Argument , donc $P(x)$. On a donc montré $\forall x \in X, P(x)$.	Montrons $\exists x \in X : P(x)$. Candidat : $x = [...]$. ▶ Montrons que $x \in X$. [Argument , donc $x \in X$. ▶ Montrons $P(x)$. [Argument , donc $P(x)$. On a donc montré $\exists x \in X : P(x)$.

Utilisation de $\forall x \in X, P(x)$	**Utilisation de $\exists x \in X : P(x)$**
En appliquant la pro $x_0 = [...]$, on a $P(x_0)$.	D'aprè trouver $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$.

Démontrer une disjonction P ou Q

Stratégie. On suppose que P est fausse et on démontre Q (ou l'inverse!)

Rédaction : Montrons que P ou Q e
Suppo P e [Argument , donc Q e
On a donc montré que P ou Q e

Démontrer une implication $P \implies Q$

Stratégie 1. Le cas direct : on suppose P vraie, et on démontre Q.

Rédaction : Montrons que P implique Q. sons
Suppo P e [Argument s/calcul, donc Q e
On a donc montré que P implique Q.

Stratégie 2. Contraposée : on suppose Q fausse et on montre que P est fausse.

Rédaction : Montrons que P implique Q.
Suppo Q e [Argument , donc P e
On a donc montré par contrapo P implique Q.

ne pas confondre réciproque et contraposée.

si on essaie de montrer une implication par l'absurde, mieux vaut démontrer la contraposée.

Démontrer une équivalence $P \iff Q$

Stratégie 1. Double implication : on démontre $P \implies Q$ puis $Q \implies P$.

Rédaction : Montrons que P et Q sont équivalente s/calcul

$\boxed{\implies}$ Montrons que P implique Q :
Suppo P e [Argument , donc Q e
On a donc montré que P implique Q.

$\boxed{\impliedby}$ Montrons que Q implique P :
Suppo Q e [Argument , donc P e
On a donc montré que Q implique P.

On a donc montré que P et Q sont équivalente

Stratégie 2. Chaîne d'équivalences : on démontre que $P \iff P_1 \iff P_2 \iff \cdots \iff Q$ en introduisant des équivalences intermédiaires plus simples à justifier.

Démontrer une équivalence $P \iff Q \iff R$ sons quealcul st

Stratégie 1. On démontre les deux équivalences séparément.
Stratégie 2. Raisonnement circulaire : on montre que $P \implies Q \implies R \implies P$.

Résoudre une (in)équation (⚠ $\neq$ démontrer une inégalité !)

Cela veut dire déterminer l'*ensemble* des solutions d'une (in)équation.

Stratégie 1. Chaîne d'équivalences : de l'équation/inéquation à un ensemble.

Exemple : « Résoudre $4|x-3| \leq 8$ dans $\mathbb{R}$ ».

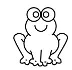
Invocation de l'indéterminée.	Soit $x \in \mathbb{R}$.
Chaîne d'équivalences	On a le *(à justifier si nécessaire ; ⚠ aux réciproques !)* $4\vert x-3\vert \leq 8 \iff \vert x-3\vert \leq 2 \iff -2 \leq x-3 \leq 2$ $\iff 1 \leq x \leq 5 \iff x \in [1,5]$.
Conclusion	Donc l'ensemble de l'inéquation $4\vert x-3\vert \leq 8$ e $[1,5]$.
Vérification (au brouillon)	*évaluer l'inéquation sur les bornes de l'intervalle, un point dedans et un point dehors.*

Stratégie 2. Par analyse et synthèse.

▶ *Analyse.* On considère un objet vérifiant la propriété voulue, et on en déduit des *conditions nécessaires*, de façon à réduire l'ensemble des candidats possibles.
▶ *Synthèse.* On vérifie que les candidats satisfont bien la propriété, ou on les rejette si ce n'est pas le cas : ces conditions sont-elles *suffisantes ?*

Exemple : « Résoudre l'équation $|x+1| = 2x+3$ sur $\mathbb{R}$. »

Analy	Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\vert x+1\vert = 2x+3$. En élevant au carré, on obtient $\vert x+1\vert^2 = (2x+3)^2$. Or, on a la chaîne d'équivalence $\vert x+1\vert^2 = (2x+3)^2 \iff \cdots \iff 3x^2+10x+8=0$, et cette équation du second degré a (aprè deux racine $x=-2$ ou $x=-\frac{4}{3}$.
Synthè	On vérifie que -2 n'e mais $-\frac{4}{3}$ l'e
Conclusion :	On a montré que l'unique solution réelle de l'équation $\vert x+1\vert = 2x+3$ e $-\frac{4}{3}$.



Le procédé d'analyse et synthèse permet aussi de montrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant une certaine propriété. L'analyse sert à déterminer l'objet et justifier l'unicité, et la synthèse suffit à prouver l'existence.

Récurrence

Cadre : on veut démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^\star$, ou un autre intervalle d'entiers.

Théorème 1 (*Principe de récurrence simple.*)

> Soit n_0 un entier et $P(n)$ une proposition définie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
> Si $\big(P(n_0)$ **et** $\forall n \geqslant n_0,\ P(n) \implies P(n+1)\big)$,
> alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Mise en place	Pour tout entier $n \geq n_0$, on définit $P(n)$: « ... ». Montrons que $P(n)$ e $n \geq n_0$.
Initiation :	$P(n_0)$ e [Argument .
Hérédité :	Soit un entier $n \geq n_0$. Montrons $P(n) \implies P(n+1)$. On suppo $P(n)$ e [Argument donc $P(n+1)$ e On a montré que pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$.
Conclusion :	Par récurrence, on a montré $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Variantes.

▶ *Récurrence double :* utile surtout pour des suites définies par récurrence double.
Stratégie. ◇ Mise en place : comme avant. se :
◇ Initiation : on démontre $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$.
◇ Hérédité : on démontre que pour tout $n \geq n_0$, la conjonction $P(n)$ **et** $P(n+1)$ implique $P(n+2)$.
◇ Conclusion : pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

▶ *Récurrence forte :* rarement utile.
Stratégie. ◇ Mise en place : comme avant. se :
◇ Initiation : on démontre $P(n_0)$.
◇ Hérédité : on démontre que pour tout $n \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![n_0, n]\!]$, alors $P(n+1)$ est vraie.
◇ Conclusion : pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.