Feuille d'exercices 14

DÉRIVABILITÉ 1

Pour commencer

Ex 1. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité, et la dérivée des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$,

(b) $g : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$,

(c) $h : x \mapsto \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$,

(d) $i : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}\right)$,

(e) $j : x \mapsto \arctan \operatorname{sh} x$,

(f) $k : x \mapsto \ln|\tan x|$,

(g) $l : x \mapsto \arcsin(1-x^2)$,

(h) $m : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$,

(i) $n : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Ex 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si f est impaire, alors f' est paire. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si f est périodique, alors f' est périodique. La réciproque est-elle vraie ?

Ex 3. Étudier le prolongement par continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto x^x$,

(b) $g : x \mapsto x \ln|x|$,

(c) $i : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$,

(d) $j : x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$.

Ex 4. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

(a) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

(b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $J \setminus \{0\}$, puis en 0.

Théorème de Rolle

Ex 5. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Ex 6. Soient $a, b > 0$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que la tangente à Γ_f en c passe par l'origine.

Ex 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Ex 8. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'' \leq 0$. Montrer que f est positive.

Ex 9. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivables. On suppose que g' est continue et ne s'annule pas sur $]a, b[$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Théorème des accroissements finis

Ex 10. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(x)| \leq |x|,$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^\star, \qquad \arctan(t) < t,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \qquad x < \exp(x) - 1 < x\exp(x),$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |e^{ib} - e^{ia}| \leq |b-a|.$$

Ex 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe C^1. Montrer que f est lipschitzienne.

Ex 12. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}$.

Ex 13. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 4 - \dfrac{1}{4}\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution, que l'on notera α, et que $\alpha \in]3,4[$.
2. On note $I =]3,4[$. Montre que $f(I) \subset I$ et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.
3. Soit (x_n) une suite définie par $x_0 = \dfrac{7}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$.
   (b) Montrer que $|x_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{12}|x_n - \alpha|$, puis en déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$,
   $$|x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{12}\right)^n.$$
   (c) Conclure sur la convergence de (x_n), et préciser sa limite.
   (d) Préciser une valeur de n telle que x_n soit une valeur approchée de α à 10^{-5} près.
   (e) Écrire un programme en `Python` qui renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de α.

Ex 14. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$.

1. Montrer que :
$$\exists !\ x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = x.$$
2. Montre que pour tout réel positif x, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{4}$.
3. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Ex 15. Soit f une fonction dérivable telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Le résultat reste-t-il vrai si la limite de f' est non nulle?

Fonctions de classe C^n

Ex 16. Calculer les dérivées successives de :

(a) $f : x \mapsto (x^2+1)e^{3x}$,

(b) $g : x \mapsto \cos^3 x$,

(c) $h : x \mapsto e^x \sin x$,

(d) $i : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$,

(e) $j : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$,

(f) $k : x \mapsto \ln(2-3x)$.

Ex 17. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

soit de classe C^2. Est-elle alors de classe C^3 ?

Ex 18. Déterminer les classes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$,

(b) $g(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$,

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,

(d) $i(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Ex 19. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Ex 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0,$$

alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Ex 21. Soit f une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Fonctions convexes

Ex 22. Montrer que la fonction $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1,+\infty[$.
En déduire que : $\forall a,b > 1,\ \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Ex 23. Montrer que : $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n > 0,\ \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.

Ex 24. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ex 25. Soient $p,q \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que : $\forall x,y > 0,\ xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.
En déduire que : $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n > 0,\ \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.