Feuille d'exercices 13
DÉRIVABILITÉ 2

Fonctions de classe C^n

Ex 1. Calculer les dérivées successives de :

(a) $f : x \mapsto (x^2+1)e^{3x}$,
(b) $g : x \mapsto \cos^3 x$,
(c) $h : x \mapsto e^x \sin x$,
(d) $i : x \mapsto (x^3+x^2+1)e^{-x}$,
(e) $j : x \mapsto \dfrac{1-x}{1+x}$,
(f) $k : x \mapsto \ln(2-3x)$.

Ex 2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2+bx+c & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

soit de classe C^2. Est-elle alors de classe C^3 ?

Ex 3. Déterminer les classes de régularité des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$,

(b) $g(x) = \begin{cases} x^3 \ln x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$,

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$,

(d) $i(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n \ln(x)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que la fonctions f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis, à l'aide de la formule de Leibniz, que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n^{(n)}(x) = x f_{n-1}^{(n)}(x) + n f_{n-1}^{(n-1)}(x).$$
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_n^{(n)}(x) = n!\left(\ln(x) + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$
3. Rappeler une expression de $\ln^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Ex 5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Ex 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n fois dérivable. Montrer que si

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f(b) = 0,$$

alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Ex 7. Soit f une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Ex 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Fonctions convexes

Ex 9. Déterminer sur quels intervalles la fonction $x \mapsto \exp\left(\dfrac{1-x^2}{2}\right)$ est convexe ou concave, et tracer son graphe en s'aidant des tangentes aux *points d'inflexion* (ce sont les points où la fonction change de convexité).

Ex 10. Montrer que la fonction $\ln \circ \ln$ est concave sur $]1,+\infty[$.
En déduire que : $\forall a,b>1,\ \ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$.

Ex 11. Montrer que : $\forall x_1,x_2,\dots,x_n>0,\ \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.

Ex 12. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que : $\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n>0,\ \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

Ex 13. Soient $p,q \geq 1$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Montrer que : $\forall x,y>0,\ xy \leq \dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$.
En déduire que : $\forall a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n>0,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$.