Feuille d'exercices 14

DÉNOMBREMENT - ESPACES PROBABILISÉS

Dénombrement

Ex 1. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. En considérant la partition de $\mathcal{P}(E)$ formée des $\mathcal{P}_k(E)$ avec $k \in [\![1, n]\!]$, retrouver le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.
2. Combien y a-t-il de parties de E admettant au moins $n/2$ éléments ? (distinguer le cas n pair et n impair)

Ex 2. Soient a, b, c des réels. Quel est le nombre de $a^2b^3c^4$ dans le développement de $(a+b+c)^9$? Généraliser le résultat pour la puissance n-ième de p réels.

Ex 3. On note k et n deux entiers naturels tels que $k \leqslant n$.

1. Montrer, à partir de la formule explicite des coefficients du binome, que pour tout $i \in [\![k, n]\!]$,
$$\binom{n}{i}\binom{i}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$
2. Donner une interprétation en terme de dénombrement de la formule précédente.
3. En déduire que pour tout réel x, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{k}x^{n-i} = (2+x)^n$.

Ex 4. Pour $p \leq n$, combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?

Ex 5. Si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note F_n le nombre de manières de monter un escalier de n marches, en ne s'autorisant que des pas d'une marche ou de deux marches.

1. Déterminer F_1, F_2 et F_3 en listant les possibilités.
2. Etablir une relation de récurrence double sur la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et en déduire sa valeur explicite ainsi qu'un équivalent quand $n \to \infty$.

Ex 6. Soit E un sous-ensemble de $[0, 1[$ de cardinal $n+1$. Montrer qu'il existe deux éléments distincts de E à distance strictement inférieure à $\dfrac{1}{n}$.

Ex 7 (Dérangements)**.** On appelle *dérangement* une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe, c'est-à-dire telle que
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma(k) \neq k.$$
Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$, et on pose par convention $d_0 = 1$.

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}.$$
2. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k!.$$

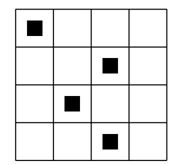
Espaces probabilisés

Ex 8. On dispose d'une urne avec 3 boules jaunes et 4 boules vertes et 5 boules rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne.

1. Déterminer la probabilité de tirer trois boules rouges.
2. Déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.
3. Déterminer la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.
4. Déterminer la probabilité d'avoir exactement deux couleurs.

Ex 9. On dispose d'une grille de 4×4 cases. On place aléatoirement 4 jetons identiques dans la grille.

1. Combien de grilles différentes peut-on obtenir ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille sans jeton dans les coins ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille où les jetons sont tous sur les bords ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir une grille avec au plus un jeton par colonne ?
5. (*Bonus*) Qu'est-ce que cela change si les jetons sont de quatre couleurs différentes ?



Exemple de grille

Ex 10. Dix paires de chaussures différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard 4 chaussures. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures ?
2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?
3. d'obtenir une et une seule paire de chaussures ?

Ex 11. La probabilité de gagner au Loto est de $\frac{1}{N}$, où N est un grand entier. En jouant N fois au Loto, quelle est la probabilité de gagner au moins une fois ? Déterminer la limite de cette probabilité quand $N \to +\infty$.

Ex 12. Au bout de combien de lancers d'un dé équilibré à 6 faces aura-t-on au moins une chance sur deux d'avoir obtenu un 6 ? Même question avec deux dés pour obtenir un double 6.

Ex 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue un tirage simultané de p boules dans l'urne.

(a) Soit $k \in [\![p, n]\!]$, et A_k l'événement "le plus grand numéro qui a été tiré est k". Calculer $\mathbb{P}(A_k)$.

(b) En déduire la formule : $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

Ex 14. Lors d'une compétition sportive, l'équipe F est qualifiée pour les quarts de finales. Son adversaire sera tiré au sort entre les équipes A, B et C. Si l'équipe F joue contre l'équipe A, sa probabilité de gagner est de $0{,}6$, si elle joue contre l'équipe B, sa probabilité de gagner est de $0{,}7$, et si elle joue contre l'équipe C, sa probabilité de perdre est de $0{,}8$.

1. Quelle est la probabilité que l'équipe F gagne son match de quart de finale ?
2. Sachant qu'elle s'est qualifiée pour les demies-finales, quelle est la probabilité que l'équipe F ait joué son quart de finale contre l'équipe C ?