Feuille d'exercices 15

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES, INDÉPENDANCE

Probabilités conditionnelles

Ex 1. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire sans remise et successivement 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure à l'intérieur du tirage?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire?

Ex 2. À la sortie d'une chaîne de production, la proportion de pièces défectueuses est estimée à 5%. Pour éviter que ces pièces défectueuse ne soient mise en vente, il y un contrôle de qualité qui accepte ou refuse la pièce avec les propriétés suivantes: si la pièce est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de $0,98$. Si la pièce est sans défaut, elle est acceptée avec une probabilité de $0,96$.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Pour une pièce acceptée, quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

Ex 3. On considère N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un de ces coffres. On a ouvert $N-1$ coffres sans trouver le trésor. Quelle est la probabilité pour qu'il figure dans le dernier coffre?

Ex 4. On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3 telles que: U_1 contient 2 boules noires et 1 boule rouge; U_2 contient 1 boule noire et 4 boules rouges; U_3 contient 3 boules noires et 4 boules rouges.

1. On tire au hasard une boule dans U_1 et une boule dans U_2, puis on les ajoute à U_3. On tire alors une boule de U_3. Elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule que l'on a tirée de U_1 soit rouge ?
2. On tire une boule de U_1 que l'on ajoute à U_2. Ensuite, on tire simultanément 2 boules de U_2 que l'on ajoute à U_3. Et enfin, on tire simultanément 3 boules de U_3. Quelle est la probabilité d'avoir 3 boules rouges ?

Ex 5. On s'intéresse à la survie d'une espèce. On suppose que chaque individu de cette espèce a 3 enfants avec la probabilité $\frac{1}{8}$, 2 avec la probabilité $\frac{3}{8}$, 1 avec la probabilité $\frac{3}{8}$, et aucun avec la probabilité $\frac{1}{8}$. À l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour que l'espèce disparaisse en n générations. Déterminer p_{n+1} en fonction de p_n, et déterminer la limite de la suite (p_n).

Ex 6. On considère $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω, et A, B et C des évènements.

1. Montrer que $\mathbb{P}(A\cup B\cup C) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)-\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{P}_{A\cup B}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}_A(B)$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.
3. On suppose de plus que $\mathbb{P}_A(B) \neq 0$. Montrer que $\mathbb{P}_{A\cap B}(C) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B\cap C)}{\mathbb{P}_A(B)}$.

Ex 7. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$. On suppose qu'initialement, il se trouve en A_1. Ensuite, les déplacements s'effectuent de la manière suivante : Si le point est en A_i, alors

- il passe en A_j avec $j \neq i$ avec une probabilité de $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas.
- il reste en A_i avec une probabilité de $\dfrac{1}{5}$.

On introduit l'évènement U_n (resp. V_n et W_n) : "être en A_1 (resp. A_2 et A_3) après n déplacements" et on note les probabilités de ces évènements u_n, v_n et w_n.

1. Déterminer u_0, v_0 et w_0.
2. Pour tout entier n, exprimer $(u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1})$ en fonction de (u_n, v_n, w_n) à l'aide d'un système.
3. Traduire ce système à l'aide d'un produit matriciel puis déterminer le terme général de chaque suite en calculant la puissance de la matrice.

Évènements indépendants

Ex 8. On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\dfrac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au $n^{\text{ème}}$ lancer ?

Ex 9. Un jeu de 52 cartes comporte 13 cœurs et 4 dames, dont la dame de cœur. On pioche une carte dans le jeu. Les événements "on obtient un cœur" et "on obtient une dame" sont-ils indépendants ? Et si on enlève le roi de trèfle du jeu ?

Ex 10. On lance deux fois un dé équilibré et on considère les évènements : A_k: "la somme des deux lancers est k" pour $k \in [\![2, 12]\!]$ et B : "le premier lancer donne 4".

1. Calculer $P(A_6)$, $P(A_7)$ et $P(A_8)$.
2. Calculer $P_B(A_k)$ pour tout $k \in [\![2, 12]\!]$.
3. Déterminer si les évènements B et A_6 sont indépendants, et de même pour B et A_7.

Ex 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On note $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

1. Soient d un diviseur de n et $D(d)$ l'ensemble de ses multiples dans Ω. Calculer $\mathbb{P}\big(D(d)\big)$.
2. On note A l'ensemble des entiers de Ω premiers avec n. Montrer que $A = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{r} \overline{D(p_k)}$.
3. Déterminer le nombre $\varphi(n)$ d'entiers de Ω premiers avec n.

Ex 12. On jette deux dés équilibrés, un rouge et un bleu. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants :

- "le chiffre du dé rouge est impair",
- "le chiffre du dé noir est pair",
- "les chiffres des deux dés ont même parité".