Feuille d'exercices 16

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS - FORMULES DE TAYLOR

Opérations sur les développements limités

Ex 1. Donner les DL$_2$, DL$_4$, DL$_{10}$ et DL$_{2024}$ en 0 de $f(x) = x^{58} + 2x^{12} + 5x^{10} + x^3$.

Ex 2. Déterminer les développements limités suivants :

(a) DL$_3$ en 0 de $\dfrac{1+x}{2+x}$,

(b) DL$_3$ en 0 de $\dfrac{1}{1+x} + \sqrt[3]{1+x}$,

(c) DL$_3$ en 0 de $\cos(x)\ln(1+x)$,

(d) DL$_4$ en 0 de $\ln(1+\sin x)$,

(e) DL$_6$ en 0 de $(1-\mathrm{ch}(x))\sin(x)$,

(f) DL$_8$ en 0 de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$,

(g) DL$_5$ en $\dfrac{\pi}{3}$ de $\cos x$.

(h) DL$_4$ en 0 de $\sin(x-x^2)$,

(i) DL$_5$ en 0 de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$,

(j) DL$_4$ en 0 de $\sqrt[3]{1+\cos x}$,

(k) DL$_2$ en 0 de $e^{\sqrt{1+x}}$,

(l) DL$_4$ en 0 de $\cos(x)^{\sin(x)}$,

(m) DL$_3$ en 0 de $\mathrm{th}(x)$,

(n) DL$_5$ en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan(x)$,

(o) DL$_4$ en 0 de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$,

(p) DL$_5$ en 0 de $\cos^3 x$.

Ex 3. En posant $x = 2+h$, déterminer les DL$_4$ en 2 de e^x, $\sqrt{1+x}$ et $\ln(1+x)$.

Ex 4. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Jusqu'à quel ordre la fonction x^α admet-elle un développement limité en 0 ?

2. La fonction $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet-elle un DL$_2$ en 0 ? un DL$_3$ en 0 ? un DL$_4$ en 0 ?

Utilisations des développements limités

Ex 5. Déterminer un DL à tout ordre de $\arcsin$ (avec la même méthode que pour déterminer un DL d'$\arctan$) et en déduire les dérivées $n^{\text{èmes}}$ en 0 de la fonction $\arcsin$.

Ex 6. Déterminer la limite en 0 de

(a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$,

(b) $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

(c) $\dfrac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}}$,

(d) $\dfrac{1}{x^2} - \mathrm{cotan}^2 x$,

(e) $\dfrac{e^x}{\mathrm{sh}x} - \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$,

(f) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos 2x}$,

(g) $\dfrac{\tan x - \arcsin x}{\sin x - \arctan x}$,

(h) $\dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$.

Ex 7. Déterminer la limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+x) - \tan x + \frac{1}{2}\sin^2 x}{3x^2\sin^2 x}$.

Ex 8. Tracer les graphes des fonctions $x \mapsto 1+\sin x$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$, et leurs tangentes en 0.

Ex 9. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente en x_0 des fonctions suivantes. Y a-t-il un extremum local en x_0 ?

(a) $\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{x}{4}$ en $x_0=0$,

(b) $\dfrac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$,

(c) $\dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$ en $x_0=0$,

(d) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$,

(e) $\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}$ en $x_0=1$,

(f) x^α en $x_0>0$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ex 10. Déterminer les développements asymptotiques suivants :

(a) $x^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\sqrt{x}}$ en 0, (b) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ en $+\infty$, (c) $\dfrac{1}{x+\ln x}$ en $+\infty$.

Ex 11. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote de

(a) $\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}$, (b) $(x^3+x^2+x+1)^{\frac{1}{3}}$, (c) $\ln(e^{x^2}-e^x-1)$.

Ex 12. Soit $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x+\ln x$.

(a) Montrer que $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ est une bijection continue croissante.

(b) Montrer que $f^{-1}(y)\underset{y\to+\infty}{\sim} y$.

(c) Montrer que $f^{-1}(y)=y-\ln y+\dfrac{\ln y}{y}+\underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln y}{y}\right)$.

Ex 13. Soit $f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 2\mathrm{sh}\,(x)-x\end{array}\right.$. Montrer que f est bijective et déterminer un DL_4 de f^{-1} en 0.

Formules de Taylor

Ex 14. 1. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 5 pour la fonction $\cos$ sur $[0,x]$.
En déduire une approximation rationnelle de $\cos(0,1)$ à 10^{-8} près.

2. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 pour $f(t)=\sqrt{t}$ sur l'intervalle $[100,101]$.
En déduire une approximation décimale de $\sqrt{101}$ à 10^{-6} près.

3. Montrer que $\forall x>0,\ 1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2<\sqrt[3]{1+x}<1+\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{9}x^2+\dfrac{5}{81}x^3$.
En déduire une valeur approchée de $\sqrt[3]{1,03}$ à 10^{-5} près.

Ex 15. Montrer que : $\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}<\ln(1+x)<\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ln(2)$.

Ex 16 (Égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n)**.** Soient I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ de classe C^{n+1}. Montrer que $\forall(a,b)\in I^2$, il existe c entre a et b tel que :

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Indication : On pourra appliquer l'exercice 6 de la feuille DÉRIVABILITÉ 2 à la fonction auxiliaire

$$g:x\mapsto f(x)-\left(f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right)+\lambda(x-a)^{n+1}$$

en choisissant λ de sorte que $g(b)=0$.