Feuille d'exercices 17

POLYNÔMES

Coefficients et degré

Ex 1. Déterminer le degré, le coefficient dominant et le coefficient constant des polynômes suivants :

$$(X+1)^3(X-2)(X+3)^2 \quad \text{et} \quad P=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}X^{k+1},\ \text{pour } n\in\mathbb{N}^\star.$$

Ex 2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$P_1 = X-2, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ P_{n+1}=P_n^2-2.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner le degré, le coefficient dominant, et le coefficient constant de P_n. Déterminer ensuite le coefficient devant X dans P_n.

Ex 3. 1. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $P(X+1)-P(X-1)=X^2+1$.

2. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P'(X)^2=4P(X)$.
3. Quels sont les polynômes $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ qui vérifient $P^2=XQ^2$?
4. Montrer que si $P\in\mathbb{K}[X]$ vérifie $P(X)=P(-X)$, alors il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P(X)=Q(X^2)$.
5. Déterminer tous les polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$ tels que $18P=P'P''$.

Ex 4. Soient n et $m\in\mathbb{N}$.

1. Donner une expression développée des polynômes $(1+X)^n$, $(1+X)^m$ et $(1+X)^{n+m}$.
2. Rappeler la forme du coefficient de degré ℓ du produit de deux polynômes.
3. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, l'*identité de Vandermonde* : pour tout $\ell\in[\![0,n+m]\!]$,

$$\binom{n+m}{\ell}=\sum_{k=0}^{\ell}\binom{n}{k}\binom{m}{\ell-k}.$$

Division euclidienne

Ex 5. Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants:

1. $A=-16X^4-64X^2-100, \quad B=4X^2+4X+10.$ 2. $A=X^3+iX^2+X, \quad B=X-i+1.$

Ex 6. Effectuer la division euclidienne de $P=2X^4-4X^3-7X-14$ par $B=X^2-2X-2$.
En déduire la valeur de $P(1+\sqrt{3})$.

Ex 7. Déterminer $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ tels que X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$.

Ex 8. Soit $n \geqslant 2$, on note $P_n = X^n - 4X + 1$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P_n par A dans les cas suivants.

1. $A = X^2 + X - 2$.
2. $A = (X-1)^2$.
3. $A = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Ex 9. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division de $(\cos\theta + X \sin\theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Ex 10. Soit (n, p) dans $\mathbb{N}^2$.

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^p - 1$.
2. Montrer l'équivalence : $X^p - 1 \,\big|\, X^n - 1 \Leftrightarrow p \,\big|\, n$.

Ex 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^2 - 3A + 2I_n = 0_n$. Calculer A^k, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Racines et factorisation

Ex 12. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^4 - 1$
2. $Q = (X^2 - X + 1)^2 + 1$
3. $R = X^8 - 2\cos(2a)X^4 + 1$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Ex 13. On note $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2$. Calculer les dérivées successives de P, montrer que P admet une racine de multiplicité 3 et en déduire la forme factorisée de P.

Ex 14. Pour un entier $n \geqslant 2$, on note $P = (1+X)(1-X^n) + (2-n)X^n - n^2X^n(1-X) + n - 2$.

1. Donner l'expression de tous les coefficients de P et son degré.
2. Montrer que 1 est une racine double de P.

Ex 15. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :

1. $X^2 - 3X + 2$ divise $X^n - 2X^{n-1} - X + 2$,
2. $(X-1)^2$ divise $X^{2n} - 2X^{n-1} - 2X + 3$.

Ex 16. Déterminer la multiplicité de la racine 1 pour les polynômes suivants :

$$P = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1,$$
$$Q = X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^n - 1.$$

Ex 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P n'admet pas de racine multiple.

Ex 18. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré $n \geq 2$.

1. Dans cette question, on suppose que P est à racines simples. Montrer que P' est scindé.
2. Soit x_0 une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que x_0 est une racine de P' de multiplicité $m - 1$.
3. En déduire que P' est scindé.

Ex 19. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si P a n racines distinctes $r_1, \ldots, r_n$, montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - r_k}$.

(b) Si P a m racines distinctes $r_1, \ldots, r_m$ de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, montrer que $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{X - r_k}$.

Ex 20. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines du polynôme $P_n = (X+1)^n - e^{2in\alpha}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Problèmes divers

Ex 21. Déterminer les solutions polynomiales des équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $xy" + 2xy' - 3y = x^3 + 2x^2 - 2$,

(b) $xy" + 2xy' - 8y = 0$.

Ex 22. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ P^{(k)}(1) = k$.

Ex 23. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = \overline{z}$.

Ex 24. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que la fonction polynomiale associée admet au plus n points fixes.

Ex 25. 1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

2. Déterminer les polynômes à coefficients réels P vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P$.
3. Déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P''(X) - 6P(X) = 0$.

Ex 26. Donner une condition sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Ex 27. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non nul tel que

$$P(X^2) = P(X)P(X+1).$$

(a) Montrer que si $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors a^2 et $(a-1)^2$ le sont aussi.

(b) En déduire que si a est une racine de P, alors $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.

(c) Montrer que les racines de P appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, -j, -j^2\}$.

(d) Déterminer alors tous les polynômes vérifiant la relation de départ.

Ex 28. On définit la suite de polynômes (T_n), appelés polynômes de Tchebychev, par

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Montrer, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$.
3. Déterminer une expression du coefficient dominant de T_n en fonction de n.
4. (a) Montrer que pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a $\cos(a+b) - \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

   (b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = \cos\left(\dfrac{1+2k}{2n}\pi\right)$ est une racine de T_n.

   (d) Conclure que $T_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k)$.

Décomposition en éléments simples

Ex 29. Déterminer la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{X^2+1}{X(X^2-1)}$, (b) $\dfrac{3X^2+3}{X^3+2X^2-X-2}$, (c) $\dfrac{5}{(X+1)^5 - X^5 - 1}$, (d) $\dfrac{X^2+1}{X^2+4}$.

Ex 30. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int^x \frac{\cos^3 t + \cos^5 t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,\mathrm{d}t$, (b) $\displaystyle\int^x \frac{\sin^3 t}{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$, (c) $\displaystyle\int^x \frac{\cos t - \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.