Feuille d'exercices 18

**ESPACES VECTORIELS**

# Sous-espaces vectoriels

**Ex 1.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels usuels.

1. $A = \left\{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \,|\, M^2 = 0 \right\}$.
2. $B = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists r \in \mathbb{R},\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = u_n + r \right\}$ (ensemble des suites arithmétiques).
3. $C = \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, z = \bar{z} \right\}$
4. $D = \left\{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \,|\, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \right\}$ (ensemble des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$).
5. $E = \left\{ (u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \,|\, \exists q \in \mathbb{C},\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n \right\}$ (ensemble des suites géométriques).

# Sous-espaces supplémentaires et somme directe

**Ex 2.** Soit $n \geq 2$. On note $F = \mathrm{Vect}(1, 1, \ldots, 1)$ et $G = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}$.

Montrer que $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

**Ex 3.** Montrer que $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P'(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(X^3 + 2)$ sont en somme directe. Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$ ? et dans $\mathbb{R}_4[X]$ ?

**Ex 4.** Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax^2 + bx + c, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$. Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

**Ex 5.** 1. Montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(1 + X + X^2\right)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Montrer que $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, P(X^2) = X^2 P(X) \right\}$ et $\left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \,\middle|\, P(1) = P(2) \right\}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

**Ex 6.** Soit $E$ l'ensemble des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers $0$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$.

**Ex 7.** Déterminer un supplémentaire de $F = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f(0) + f'(0) = 0 \right\}$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

**Ex 8.** Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z = 0 = 2x - y + 2z + t\}.$$

**Ex 9.** Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de $F = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, u_3 = 0 \right\}$.

**Ex 10.** Soit $A = X^3 - 4X + 2$. On note $F = \{P \in \mathbb{R}[X], A \text{ divise } P\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de $F$ dans $\mathbb{R}[X]$.

**Ex 11.** Montrer que $\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \,\middle|\, f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n) \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$, et en trouver un supplémentaire.

# Familles libres, familles génératrices, bases

**Ex 12.** Combinaisons linéaires dans différents espaces vectoriels.

1. Est-ce que $u = (1, 2, -1)$ est une combinaison linéaire $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$ ?
2. Est-ce que $P = X^3 + 2X^2 - X$ est une combinaison linéaire de $P_1 = X^3 - X$, $P_2 = X^2 + 2X - 2$ et $P_3 = 2X - 1$?
3. Est-ce que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

**Ex 13.** Voici une liste de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ donnés soit comme sous-espace vectoriel engendré par une famille libre, soit comme ensemble de vecteurs vérifiant une ou deux équations linéaires. Pour chacun d'entre eux, donner une description de l'autre type.

(i) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y - z = 0\right\}$ ;

(ii) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -2x + 2y - 3z = 0\right\}$ ;

(iii) $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((1, 2, -1), (2, 3, -3)\right)$ ;

(iv) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 2x + y - z = 0\right\}$ ;

(v) $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x - 2z = x + 3y - 2z = 0\right\}$ ;

(vi) $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left((2, 3, -3)\right)$.

**Ex 14.** Point méthode. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants.

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Que faut-il faire pour : (on ne cherchera pas à faire tous les calculs)

(i) montrer que la famille $(a, b, c)$ est libre ?

(ii) montrer que $e \notin \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(c, f)$ ?

(iii) montrer que $(d, e, f)$ est génératrice ?

(iv) montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(d, g) \subset \mathrm{Vect}(a, b, f)$ ?

(v) déterminer toutes les relations de liaison entre $a$, $b$, $c$ et $d$ ?

**Ex 15.** Montrer que les ensembles suivants sont chacun un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel, puis en déterminer une famille génératrice.

1. $F_1 = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) + P'(1) = 0\right\}$.
2. $F_2 = \left\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\right\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Ex 16.** Pour chacune des familles $\mathcal{F}$ de vecteurs ci-dessous, déterminer si elle est libre et/ou génératrice de l'espace vectoriel $E$. Si la famille est liée, donner explicitement une relation linéaire entre les vecteurs. Si elle n'est pas génératrice, donner explicitement un vecteur de $E$ qui n'est pas combinaison linéaire de la famille.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (0, 1, 1)$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F} = (A, B, C)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, avec les polynômes $P_1 = X^2 + 2X - 1$, $P_2 = X - 1$ et $P_3 = X^2 + 1$.

**Ex 17.** 1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que l'on a $\operatorname{Vect}(\operatorname{ch}, \operatorname{sh}) = \operatorname{Vect}(\exp, x \mapsto \exp(-x))$.

2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{[-1,1]}$, montrer que le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}\left(x \mapsto \cos(2x), \cos^2, \sin^2\right)$ peut s'obtenir comme $\operatorname{Vect}(f, g)$, pour deux fonctions $f, g \in \mathbb{R}^{[-1,1]}$ bien choisies.

**Ex 18.** Soit $n \geq 2$. Soit $E$ un espace vectoriel de base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Montrer que la famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$ est libre.

**Ex 19.** On note $u, v, w$ les trois suites réelles définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1$, $v_n = 2^n$ et $w_n = 3^n$.

1. Soit $\alpha, \beta$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} 3^{-n}(\alpha u_n + \beta v_n + \gamma w_n) = \gamma$

2. Montrer, en s'inspirant du résultat précédent, que la famille $(u, v, w)$ est libre.

3. On note $F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(u, v, w)$. Montrer qu'il existe une unique suite $(x_n) \in F$ telle que $x_0 = 1$, $x_1 =$ et $x_2 = 6$ et donner son terme général.

**Ex 20.** 1. Montrer que les suites $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont linéairement indépendantes.

2. Montrer que les fonctions $\cos$, $\sin$ et $\exp$ sont linéairement indépendantes.

**Ex 21.** Soit $E$ un espace vectoriel possédant une famille libre $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$.

On note $u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ et, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $v_i = u + e_i$.

Montrer que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est liée si et seulement si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_i = -1$.

**Ex 22.** Exemples de base dans des espaces vectoriels usuels.

1. On note $E = \mathbb{R}^4$ et $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, 1)$, $u_3 = (-1, 1, 1, -1)$ et $u_4 = (0, 0, 1, 1)$.
Montrer que $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $E$.
Donner les coordonnées $(1, 2, 3, 4)$ dans cette base.

2. On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2.
Montrer que la famille $(X + 1, X - 1, X^2 - 1)$ est une base de $E$.
Donner les coordonnées dans cette base du polynôme $X^2$.

**Ex 23.** 1. Montrer que $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(3, 7, -2)$ dans cette base.

2. On définit $F = \operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}((1, -1, 1), (0, -1, 2), (1, -2, 3)) \subset K^3$. En donner une base et montrer qu'en fait $F = \left\{(x, y, z) \in K^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0\right\}$.

3. Donner une base de $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; x - y + 2z = 0\right\}$.

4. Donner une base de $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 3x - 2y + z - 2t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\right\}$.

**Ex 24.** Déterminer si les familles suivantes sont des bases de $\mathbb{K}_2[X]$ et, le cas échéant, déterminer les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans cette base.

(i) $(1, X - 1, (X - 1))^2$ ; (ii) $(X^2 + X, X^2 + 1, X + 1)$ ; (iii) $((X - 1)^2, X^2, (X + 1)^2)$.

**Ex 25.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on définit $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1} \in \mathbb{K}_n[X]$.
Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

**Ex 26.** Soit $a \neq b \in \mathbb{C}$. Montrer que $\left((X - a)^k (X - b)^{n-k}\right)_{k \in [\![0, n]\!]}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.