Feuille d'exercices 19

APPLICATIONS LINÉAIRES

Pour commencer

Exercice 1. Pour chacune des applications définies ci-dessous, déterminer si elle est linéaire. Si c'est le cas, donner une famille génératrice de son image et de son noyau.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y+1, 2y-1) \end{cases} \qquad f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(2), P'(1)) \end{cases}$$

$$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \sin(2x+3y) \end{cases} \qquad f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \frac{1}{2}(M + M^\top) \end{cases}$$

$$f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases} \qquad f_7 : \begin{cases} \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left(t \mapsto \frac{f(t)}{t^2+1}\right) \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (-x, y) \end{cases} \qquad f_8 : \begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 f \end{cases}$$

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par

$$f\big((x,y,z)\big) = \frac{1}{2}\left(x+y+z, 2y, x-y+z\right).$$

1. Pour $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de votre choix, calculer $f(u)$ puis $f(f(u))$. Généraliser en démontrant que $f \circ f = f$.
2. Déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$.
3. Déterminer v_2 et $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_2, v_3)$. Calculer $f(v_2)$ et $f(v_3)$.
4. Vérifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}$.
5. Pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, déterminer les coordonnées de $f(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction de celles de u.

Exercice 3. On note $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : \begin{cases} E \to E \\ X \mapsto AX \end{cases}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note F l'ensemble des vecteurs invariants par φ_A, c'est-à-dire $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid \varphi_A(X) = X\}$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_A)$. Que peut-on en déduire pour φ_A ? On admet que φ_A est aussi surjective.
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer une famille génératrice (X_1, X_2).
3. Soit $Y \in E$. Montrer que $\varphi_A(Y) = 2Y$ si et seulement si $Y \in \mathrm{Vect}(X_3)$, avec X_3 un vecteur à préciser.
4. Montrer que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ est une base de E.
5. Pour un vecteur $X \in E$, donner les coordonnées de $\varphi_A(X)$ dans $\mathcal{B}$ en fonction de celles de X.
6. En déduire une expression de $\varphi_A^{-1}(Y)$ pour $Y \in E$ à l'aide des coordonnées dans $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Montrer qu'il existe une application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0)=(1,0), f(1,1,0)=(1,0) \text{ et } f(1,1,1)=(1,1)$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 5. Soient E, F des esp. vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{F}=(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.

1. Montrer que si $\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)$ est libre, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.
2. Montrer que si $\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)$ est génératrice de F et $\ker(f)=\{0_E\}$, alors $\mathcal{F}$ est génératrice de E.
3. Montrer que si $\mathcal{F}$ est libre et $\ker(f)\cap \mathrm{Vect}(\mathcal{F})=\{0_E\}$, alors $\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)$ est libre.

Injectivité, surjectivité...

Exercice 6. Montrer que $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y,2z,y+z) \end{array}\right.$ est un automorphisme et expliciter f^{-1}.

Exercice 7. Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f+f' \end{array}\right.$. L'application est-elle injective? surjective?

Exercice 8. Soit $E=\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on définit l'application $\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \left(g : t \mapsto \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{cases}$.

Montrer que φ est un endomorphisme de E. Est-il injectif? surjectif?

Exercice 9. Soit $n \geq 1$ un entier et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $T_n : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & R_n[X] \\ P & \longmapsto & P''+\omega^2 P \end{array}\right.$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En calculant $T_n(1), T_n(X), T_n(X^2), \dots, T_n(X^n)$, montrer que T_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que l'équation différentielle $y''+\omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, dont on déterminera le degré.

Exercice 10. On note $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et f l'application qui à une suite (u_n) de E associe la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ?
2. Déterminer g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.
3. Peut-on trouver h un endomorphisme de E tel que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$?

Relations entre noyaux et images

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\quad g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)} \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Montrer que : $f \circ g = g \circ f \implies \forall u \in \mathrm{Ker}(f),\ g(u) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\forall v \in \mathrm{Im}(f),\ g(v) \in \mathrm{Im}(f)$.
   Cela signifie que si f et g commutent, alors le noyau et l'image de f sont stables par g.

Exercice 12. Soit E, F et G trois espaces vectoriels et $(f,g) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,G)$.

1. Montrer que l'on a $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et que

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g \circ f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g) = \{0\}.$$

2. Montrer que l'on a $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ et que

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g) \iff \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(g) = F.$$

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 - u^2 + u - id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u - id_E) \oplus \mathrm{Ker}(u^2 + id_E) = E$.

Endomorphismes remarquables

Exercice 14. Soit $\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est un projecteur, et en déterminer les éléments caractéristiques

Exercice 15. Soit $\phi_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ avec $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 16. On pose $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left(X^2 + X, X^3 + 1\right)$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$ et déterminer le projeté de $X^5 - X^3 + 1$ sur F parallèlement à G.

Exercice 17. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p, q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{E})}$.
2. Supposons dorénavant que $p + q$ est un projecteur, montrer que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe.
3. Montrer ensuite que $p + q$ est la projection de E sur $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$.

Exercice 18. Soient p un projecteur de E et $f = p + id_E$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer f^n en fonction de p et n

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que l'on a $\ker f = \ker(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}\, g = \mathrm{Im}(g \circ f)$.
2. Calculer $(g \circ f)^2$. Qu'en déduit-on sur l'endomorphisme $p = g \circ f$?
3. Déduire de ce qui précède que $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont supplémentaires.
4. Montrer l'équivalence

$$f \text{ injective} \iff g \text{ surjective} \iff f, g \in GL(E),$$

   et que, si ces trois assertions sont vraies, alors f et g sont inverses l'un de l'autre.