Feuille d'exercices 1

ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Applications injectives, surjectives, bijectives

Ex 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit $f(n) = 2n$ et $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

1. Vérifier que f et g sont des applications définies de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$.
2. Étudier les propriétés d'injectivité et de surjectivité de f, de g, de $g \circ f$ et de $f \circ g$.

Ex 2 (Equipotence de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)**.** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$

Montrer que f est bijective et donner la bijection réciproque.

Ex 3. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ des applications telles que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrer que f est surjective et que g est injective.

Ex 4. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications et $h : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (f(x), g(x)). \end{cases}$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective?

Ex 5. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer : f injective $\iff$ f surjective.

Ex 6. Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. *Indication : considérer* $A := \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Surjectivité et injectivité des fonctions réelles ou complexes

Ex 7. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application strictement croissante. Montrer que f est injective.

Ex 8 (Bijection induite)**.** Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{3x+5}{x-2} \end{cases}$.

Déterminer une partie B de $\mathbb{R}$ telle que $h : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$ soit une bijection, et déterminer h^{-1}.

On appelle h fonction *induite* par f sur B.

Ex 9. Pour les fonctions suivantes, dire si elles sont bien définies, injectives, surjectives, bijectives :

$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$; $\quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1+x^2} \end{array}$; $\quad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2xy \end{array}$; $\quad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{1+|z|} \end{array}$.

Ex 10. Montrer que les fonctions suivantes sont bijectives et déterminer leur application réciproque.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [4,+\infty[\\ x & \mapsto & 3+\sqrt{1+\mathrm{e}^{x-2}} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (2x+3y, x-y) \end{array} \qquad l : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\setminus\{2i\} & \to & \mathbb{C}\setminus\{2i\} \\ z & \mapsto & \frac{i-2z}{2+iz} \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,-y) \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{2x}{1-x^2} \end{array} \qquad m : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (z,z') & \mapsto & (2z+z', 3z-z') \end{array}$$

Ex 11 (Bijections composées)**.** On considère $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1} \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array} \right.$.

1. Montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}.
2. En déduire que f est bijective et l'expression de f^{-1}.

Image directe, image réciproque

Ex 12. 1. Déterminer $\sin(A)$, dans les cas $A = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $[0, 2\pi]$, $[-\pi, \pi]$, $]0, \pi/2]$, $[-\pi, \pi/2]$.

2. Déterminer $\sin^{-1}(B)$ dans les cas $B = [-1, 1]$, $[0, 1]$, $[3, 4[$, $\mathbb{R}$, $\{1\}$, $\{-1, 1\}$.

Ex 13. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+\frac{1}{z}. \end{array} \right.$ Est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f(\mathbb{R}^*)$ et $f(\mathbb{U})$, puis $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(i\mathbb{R})$ (plus dur !).

Ex 14. Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que pour tout $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et que l'autre inclusion est fausse a priori.
2. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.
3. Montrer l'équivalence : f surjective $\iff \forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$.
4. Montrer l'équivalence : f injective $\iff \forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$. Quelle inclusion est toujours vraie ?

Ex 15 (Images directe et réciproque *versus* union et intersection)**.** Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

1. Soient A et B deux parties de F. Montrer que :
   - $A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
   - $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   - $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
2. Soient C et D deux parties de E.
   - Montrer que $C \subset D \implies f(C) \subset f(D)$.
   - Montrer que $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$.
   - Montrer que $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D)$.
   - Donner un exemple prouvant que l'inclusion ci-dessus n'est pas toujours une égalité.
3. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f\,(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. Montrer que f est bijective si et seulement si : $\forall A \in \mathcal{P}(E), f\,(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.