Feuille d'exercices 23

VARIABLES ALÉATOIRES

Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Donner la loi de X dans chacun des cas suivants.

1. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. On note X le nombre de filles dans une famille de 3 enfants.

2. Dans un champ, on trouve 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de ce champ. On note X le nombre de bosses de cet animal. Même question en ajoutant 15 moutons.

3. On range 20 cravates dans 3 tiroirs, au hasard. On note X le nombre de cravates dans le premier tiroir.

4. Un jeu de tarot (78 cartes) est mélangé et posé faces cachées. On retourne une par une les cartes jusqu'à trouver l'Excuse. On note X le nombre de cartes retournées au total.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale avec $\mathbb{E}(X) = 6$ et $\mathbb{V}(X) = 2$.

(a) Déterminer les paramètres n et p de la loi de X puis calculer $\mathbb{P}(X = 5)$ et $\mathbb{P}(X = 7)$.

(b) À l'aide du théorème de transfert, calculer $\mathbb{E}(2^X)$

Exercice 3. Un joueur lance n fois une pièce équilibrée. Soit X la variable aléatoire donnant le numéro du lancer lors duquel le résultat est pile pour la première fois ; si pile n'est jamais obtenu, X prend la valeur 0. Déterminer la loi de X.

Exercice 4. Un joueur lance successivement deux fois un dé équilibré. Soit X la variable aléatoire égale à la différence entre les résultats du premier et du deuxième lancer. Déterminer les lois de X, $|X|$ et X^2.

Exercice 5. Un examen est passé par n candidats. Chaque candidat réussit l'examen avec une probabilité p. En cas d'échec, le candidat passe un examen de rattrapage, qu'il réussit avec la même probabilité p. Déterminer la loi du nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves.

Espérance, variance, écart-type

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, 2]\!]$, d'espérance $\dfrac{3}{2}$ et de variance $\dfrac{1}{4}$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 7. Un joueur mise k euros sur un numéro entre 1 et 6. On lance ensuite 3 dés : si le numéro parié n'apparaît pas, le joueur perd sa mise ; dans le cas contraire il la récupère, augmentée de son multiple par le nombre d'occurrences de son numéro. Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 8. Un placard contient n paires de chaussures. On tire au hasard $2r$ chaussures (avec $0 \leq r \leq n$). Soit X la variable aléatoire égale aux nombres de paires complètes obtenues.

(a) On numérote les paires de 1 à n, et on appelle X_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement "la paire i se trouve parmi les chaussures tirées". Déterminer la loi et l'espérance de X_i.

(b) En déduire l'espérance de X.

Exercice 9. Une puce se déplace sur une droite d'origine 0. À chaque instant, elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p, ou vers la gauche avec une probabilité $1-p$. À l'instant 0, la puce est à l'origine. On note X_n sa position à l'instant n. Déterminer la loi et l'espérance de X_n.

Exercice 10. Lors d'une séance de penaltys, cinq joueurs tirent successivement leur penalty, indépendamment les uns des autres. On suppose qu'ils ont tous une probabilité $\dfrac{3}{4}$ de marquer.

(a) Donner la loi du nombre de penaltys marqués par l'équipe. Quelle est la probabilité que l'équipe réussisse exactement 3 penaltys ?

(b) Donner l'espérance du nombre de penaltys marqués.

(c) L'équipe adverse tire ses penaltys indépendamment et avec la même probabilité de marquer. Exprimer, sous forme de somme, la probabilité que la séance de 5 penaltys finisse sur une égalité.

Exercice 11. Une urne contient 1 jeton marqué 1, 2 jetons marqués 2, et ainsi de suite jusqu'à n jetons marqués n. On tire un jeton, et on note X la variable aléatoire égale au numéro obtenu. Déterminer l'espérance et la variance de X. Quelle est la probabilité de l'événement "$|X-\mathbb{E}(X)| \leq \sigma(X)$" pour $n=25$?

Couples de variables aléatoires

Exercice 12. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. Montrer que $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}$.

Exercice 13. On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. On note X la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un roi", Y la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire une dame ", et Z la variable aléatoire indicatrice de l'événement "on tire un cœur".

(a) Déterminer les lois conjointes et marginales des couples (X,Y) et (X,Z).

(b) Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. À un péage autoroutier n voitures franchissent au hasard et indépendamment l'une des trois barrières de péage mises à leur disposition. On note X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires dénombrant les voitures ayant franchi ces barrières.

(a) Déterminer la loi de X_1.

(b) Calculer les variances de X_1, X_2 et de X_1+X_2.

(c) En déduire la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$ respectivement. Montrer que $X+Y$ suit la loi $\mathcal{B}(m+n,p)$.

Exercice 16. On pioche deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant a boules noires et b boules blanches. On note X_1 la variable indicatrice de l'événement "la première boule est noire" et X_2 la variable indicatrice de l'événement "la seconde boule est noire".

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X_1,X_2), ainsi que ses lois marginales.

(b) Montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) Déterminer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

(d) Soit $X=X_1+X_2$. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 17. On jette n dés, et on note X et Y les nombres de 1 et de 6 obtenus respectivement.

(a) Déterminer les lois suivies par X et Y, leurs espérances et leurs variances.

(b) Déterminer, pour tout $j \in Y(\Omega)$, la loi de X sachant $Y = j$.

(c) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y). Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 18. On donne dans le tableau suivant la loi d'une variable aléatoire X :

k	-2	-1	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$2a$	a	a	$3a$	a	$2a$

1. Justifier que $a = \dfrac{1}{10}$. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 0)$ et $\mathbb{P}(|X| \leqslant 1)$.
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Soit $Y = X + 1$. Exprimer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$.
3. Déterminer la loi de la variable $Z = |X - 1|$.
4. Soit T une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{3}$ telle que X et T soient indépendantes. Déterminer la loi conjointe du couple (T, X) et calculer $\mathbb{E}(TX)$.

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 19. Soient X une variable aléatoire réelle et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante. Montrer que

$$\forall a \geq 0, \qquad \mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(g(|X|))}{g(a)}.$$

Exercice 20. Lors d'élections, on sait qu'un parti politique recueille en général un pourcentage p des voix compris entre 20 et 30. Combien de personnes suffit-il d'interroger à la sortie du bureau de vote pour estimer p avec une précision de 3%, et une probabilité d'erreur inférieure à 10% ?

Exercice 21. Une usine A et une usine B fabriquent des pièces de moteur. En moyenne 5% des pièces fabriquées dans l'usine A et 10% des pièces fabriquées par dans l'usine B sont défectueuses. Pour un contrôle, on prélève aléatoirement 100 pièces de A et 400 pièces de B, et on considère X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de pièces prélevées défectueuses respectivement de A et de B.

(a) Déterminer les lois de X et Y.

(b) Soit $Z = X + Y$. Déterminer l'espérance et la variance de Z.

(c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer c tel que le risque que le nombre de pièces défectueuses prélevées soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 22. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Montrer que

$$\mathbb{P}(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Exercice 23. Soit X une variable aléatoire de moyenne μ et de variance σ^2. En introduisant la variable aléatoire $Y = (\alpha(X - \mu) + \sigma)^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$