Feuille d'exercices 25

DÉTERMINANTS

Calculs de déterminants

Ex 1. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 27 & 28 & 29 \\ 28 & 30 & 32 \\ 29 & 32 & 36 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{vmatrix}$

Ex 2. Calculer les déterminants suivants :

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} a & b & c & b \\ b & a & b & c \\ c & b & a & b \\ b & c & b & a \end{vmatrix}$

Ex 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$, et $d_n = \underbrace{\begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ 0 & & & & 0 \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}}_{2n}$.

Déterminer d_n en fonction de d_{n-1}, et en déduire d_n.

Ex 4. Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ où :

(a) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = \min(i,j)$. (b) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = |i-j|$.

Applications

Ex 5. Soient $a_0, a_1 \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer que $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme et en déduire que le déterminant $V(a_0, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$ est non nul.

Ex 6. Soit $p \in \mathbb{N}$ et soit $A \in M_{2p+1}(\mathbb{K})$ antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

Ex 7. Les familles suivantes sont-elles des bases de E ? utiliser le déterminant seulement si ça accélère...

(a) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (-2+i, 0, -i)$,

(b) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1)$, $u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$,

(c) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2+3X-1$, $P_2 = 2X^2-2X+3$, $P_3 = 3X^2+2X-4$,

(d) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$,

(e) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = (X-\alpha)(X-\beta)$, $P_2 = (X-\alpha)(X-\gamma)$, $P_3 = (X-\beta)(X-\gamma)$.

Ex 8. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad |\lambda| < \delta \Rightarrow A + \lambda B \in GL_n(\mathbb{R}).$$

Ex 9. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la famille

$$\left(\left(1, \cos a, \cos^2 a\right), \left(1, \cos b, \cos^2 b\right), \left(1, \cos c, \cos^2 c\right)\right)$$

soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Ex 10. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

(a) $\left\{\begin{array}{rcl} 13x + 42y &=& 4 \\ 7x + 20y &=& 10 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x - 6y + z &=& 7 \\ x + 2y + z &=& 5 \\ -2x + 5y - 2z &=& -1 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcl} \lambda x + y + z &=& 1 \\ x + \lambda y + z &=& \lambda \\ x + y + \lambda z &=& \lambda^2 \end{array}\right.$

Ex 11. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et A et B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $P(X) = \det(A+XB)$ est un polynôme de degré inférieur au rang de B.

2. *Application :* soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}$. On considère $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et

$$A = \begin{pmatrix} b & c & c & \dots & \dots & c \\ a & b & c & & & \vdots \\ a & a & b & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & b & c \\ a & \dots & \dots & \dots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Calculer le $\det A$ en utilisant $P(X) = \det(A + XJ)$.
Indication : on déterminera deux valeurs particulières de P.

Déterminant d'un endomorphisme

Ex 12. Soit $A \in M_2(\mathbb{K})$, et soit $f \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{K}))$ définie par $f(M) = AM$.
Montrer que $\det f = (\det A)^2$.

Ex 13. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ définie par $\varphi(P) = Q$ où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt.$$

Montrer que φ est bien définie, et calculer $\det \varphi$.

Ex 14. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un projecteur de E de rang $r \leq n$, et soit s la symétrie associée à p (qui laisse stable $\operatorname{Im} p$). Déterminer les déterminants de p et s.