Feuille d'exercices 26

ESPACES EUCLIDIENS

Produit scalaire

Ex 1. Montrer que les applications suivantes définissent des produits scalaires sur E :

1. $(P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$).

2. $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

3. $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Ex 2 (Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^TB) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$.

Montrer que $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 3. Soit a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, k un réel et $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ l'application déterminée par $\varphi(x,y) = \langle x,y\rangle + k\,\langle x,a\rangle\,\langle y,a\rangle$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Ex 4. Montrer que la formule $\forall f,g \in C^1([0,1]), \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f'\,g' + f(1)\,g(0) + f(0)\,g(1)$ définit un produit scalaire sur $C^1([0,1])$.
Indication pour la positivité : appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour un autre produit scalaire, à f'.

Bases orthonormées et algorithme de Gram-Schmidt

Ex 5. 1. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire usuel, la famille $\big(X^2-1, 3X+1, X^2+X\big)$.

2. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, la famille $((1,1,1),(1,0,1),(0,1,1))$.

Ex 6. Soit $\big(E,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\big)$ un espace vectoriel euclidien et soit $f : E \mapsto E$ une application telle que

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle\,.$$

1. Montrer que l'image d'une base orthonormée de E par f est une base orthonormée de E.

2. En déduire que f est linéaire.

Ex 7. Soit $\big(E,\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\big)$ un espace préhilbertien réel avec $n \in \mathbb{N}^\star$. On suppose qu'il existe $(e_1,\ldots,e_n) \in E^n$ tous non nuls tels que

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2 = \|x\|^2.$$

Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Ex 8. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors
$$\left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'^2(t)\,\mathrm{d}t\right) \geq \left(\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right)^2.$$

Ex 9. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $\left(x^2+y^2+z^2\right) \leq 1$. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leq 14$.

Ex 10. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $(2x^2+y^2+5z^2) \leq 1$. Montrer que $(x+y+z)^2 \leq \dfrac{17}{10}$.

Ex 11. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $I_{m+n}^2 \leq I_{2n} I_{2m}$.

Ex 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$.

Ex 13. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \leq n \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2$.

Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Ex 14. Montrer que si E est un espace préhilbertien réel, $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Ex 15. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique.
Déterminer l'orthogonal de $G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+2y-z+t=0\right\}$.

Ex 16. On munit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel.
Déterminer l'orthogonal de $H = \left\{f \in E \;\middle|\; f(0)=0\right\}$.

Ex 17. Déterminer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis de celui des matrices symétriques pour le produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 18. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel et on considère $F = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{tr}(M) = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Déterminer $F^\perp$.

Ex 19. Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace pré-hilbertien réel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$. Que devient cette inclusion si E est de dimension finie ?

Ex 20. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour tous $f,g \in E$, on pose :
$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 \Big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit $V = \{f \in E \,|\, f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, V contient une fonction polynomiale de degré n. Que peut-on en déduire sur la dimension de V ?
3. Soit $W = \{f \in E \,|\, f = f''\}$. Déterminer une base de W.
4. Montrer que V et W sont orthogonaux.
5. Montrer que $E = V \oplus W$.

Projection orthogonale et distance à un sous-espace vectoriel

Ex 21. On suppose $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y - z + t = 0\right\}.$$

On note p la projection orthogonale sur F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.

Ex 22. On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique et on pose

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - y + z = 0 = x + y + 2z\right\}.$$

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s par rapport à F dans la base canonique.

Ex 23. Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall u \in E, \quad \|p(u)\| \leq \|u\|.$$

Ex 24. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels distincts. On pose, $\forall P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. Montrer que l'application ci-dessus définit un produit scalaire.
2. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_j(X) = \dfrac{\displaystyle\prod_{i \neq j}(X - a_i)}{\displaystyle\prod_{i \neq j}(a_j - a_i)}$.
   (a) Que vaut $P_j(a_k)$?
   (b) Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille orthonormale. En déduire que c'est une base de E.
3. Soit $F = \left\{P \in E \;\middle|\; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$. Déterminer la distance de X^n à F.

Ex 25. On considère $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel. On considère le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

1. Trouver une base de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur F.

Ex 26. On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$.

1. On note $S_3(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel constitué des matrices symétriques. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $S_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel $S_3(\mathbb{R})$.

Ex 27. On munit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\forall f, g \in E, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On note $F = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2\right)$. Déterminer la distance de $\exp$ à F.

Ex 28. On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel et on note J_n la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $M \in E$ de trace nulle. Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ_n\|$.

Ex 29. On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \displaystyle\int_0^1 AB$ et on pose $Q = 1 + X + X^2 + X^3 \in E$.

1. Montrer que $F = \left\{ P \in E \,\middle|\, \displaystyle\int_0^1 (t^3 - t)\, P'(t)\, dt = \int_0^1 P \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Calculer $d(Q, F)$.

Ex 30. 1. Montrer que $(f, g) \mapsto \langle\, \cdot\,, \cdot\rangle fg = \displaystyle\int_0^1 (fg + f'g')$ est un produit scalaire sur $C^1([0,1])$.

2. On pose $F = \left\{ f \in C^2([0,1]) \,\middle|\, f'' = f \right\}$. Montrer que

$$F^{\perp} = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,\middle|\, f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

3. Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale de $C^1([0,1])$ sur F.
4. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,\middle|\, f(0) = \alpha, f(1) = \beta \right\}.$$

   Montrer l'égalité

$$\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(t)^2 + f'(t)^2)\, dt = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)\mathrm{ch}\ 1 - 2\alpha\beta}{\mathrm{sh}\ 1}.$$

Ex 31. Soit $f \in C^0([0,1])$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x f(x)\, dx = 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx \geq 4$.

Géométrie

Ex 32 (Stricte convexité de la sphère unité)**.**

1. Soit E un espace préhilbertien et $x \neq y \in E$ deux vecteurs unitaires.
   Montrer $\forall t \in \,]0, 1[\,, \|(1-t)x + ty\| < 1$.
2. En déduire que la norme uniforme sur $C^0([0,1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.

Ex 33 (Identité du parallélogramme)**.** Soit E un espace préhilbertien de norme euclidienne $\|\cdot\|$. Montrer que

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ex 34 (Mercedes)**.** Soit $(v_i)_{i=1}^3$ une famille de trois vecteurs unitaires d'un espace euclidien E.

On suppose que quels que soient $i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle = -\dfrac{1}{2}$. Montrer que les trois vecteurs sont coplanaires.